



DOI: 10.12086/oe.2018.170616

大气湍流畸变波前斜率的稀疏分解

李娟娟¹, 蔡冬梅^{1*}, 贾鹏¹, 李灿²¹ 太原理工大学物理与光电工程学院, 山西 太原 030024;² 太原理工大学信息工程学院, 山西 太原 030024

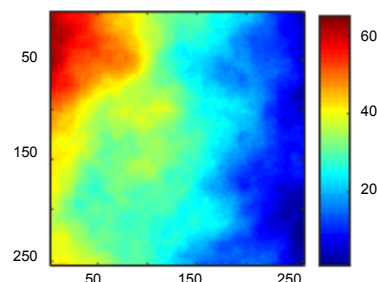
摘要: 利用压缩感知技术对大气湍流波前探测数据进行压缩, 可使测量数据量大幅度减少, 能有效降低数据的传输与存储压力, 有利于湍流波前的实时测量; 但压缩条件要求波前信号是稀疏的或在某个变换域内能够稀疏表示。本文对大气湍流波前斜率信号的稀疏性进行了初步研究, 基于大气湍流的统计特性, 在频域内对湍流功率谱作黄金分割采样(GS), 建立符合大气湍流斜率物理特征的稀疏基, 明确了湍流波前斜率的稀疏性。利用该 GS 稀疏基对波前斜率进行稀疏分解, 并通过仿真实验对比了不同稀疏基对波前斜率的稀疏分解效果。在此基础上, 以 GS 基作为训练基的初始化学字典, 进行 K 奇异值分解字典训练(KSVD), 得到训练基(KSVD-GS), 分析了该训练基对波前斜率信号的稀疏表示性能。本文验证了波前斜率能够稀疏分解, 建立了一个较好的稀疏基, 为压缩感知的应用提供了前提基础。

关键词: 大气湍流; 波前探测; 波前斜率; 压缩感知; 稀疏分解

中图分类号: O439

文献标志码: A

引用格式: 李娟娟, 蔡冬梅, 贾鹏, 等. 大气湍流畸变波前斜率的稀疏分解[J]. 光电工程, 2018, 45(2): 170616



Sparse decomposition of atmospheric turbulence wavefront gradient

Li Juanjuan¹, Cai Dongmei^{1*}, Jia Peng¹, Li Can²¹Institute of Physics and Optoelectronics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan, Shanxi 030024, China;²Institute of Information Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan, Shanxi 030024, China

Abstract: Using compressive sensing technology in atmospheric turbulent wavefront detected data compression can greatly reduce the amount of measured data, can effectively reduce the pressure of data transmission and storage, which is good for real-time measurement of turbulent wavefront. However, the wavefront signal is required to be sparse or can be sparsely represented in one transform domain. In this paper, a preliminary study of the sparsity of the atmospheric turbulent wavefront gradient signal is carried out. Based on the statistical characteristics of atmospheric turbulence, the golden section (GS) is used to make the turbulent power spectrum in the frequency domain, and the sparse basis is established to meet the physical characteristics of the turbulent gradient, then the sparsity of the gradient of the turbulent wavefront is clarified. The sparse decomposition of the wavefront gradient is simulated by using the GS sparse base, and the sparse decomposition effect of different sparsity bases on the wavefront gradient is compared. On this basis, using the GS basis as the initialization training dictionary, K singular value decomposition (KSVD) dictionary training is carried out to get the training base (KSVD-GS), and then the

收稿日期: 2017-11-10; 收到修改稿日期: 2017-12-29

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金项目(11503018); 天文联合基金项目(U1631133)

作者简介: 李娟娟(1992-), 女, 硕士, 主要从事图像处理方面的研究。E-mail: m18335100031@163.com

通信作者: 蔡冬梅(1974-), 女, 博士, 副教授, 主要从事液晶自适应光学技术、大气湍流模拟的研究。E-mail: dm_cai@163.com

sparse representation performance of this training base to the wavefront gradient signal is analyzed. This paper verifies that the wavefront gradient can be sparsely decomposed and build a better sparse basis, and provides the precondition for the application of compressive sensing.

Keywords: atmospheric turbulence; wavefront gradient; wavefront detection; compressed sensing; sparse decomposition

Citation: Li J J, Cai D M, Jia P, *et al.* Sparse decomposition of atmospheric turbulence wavefront gradient[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2018, **45**(2): 170616

1 引言

在天文成像观测中,由于大气湍流和噪声的影响,会使天文观测图像的成像质量下降。自适应光学技术是校正大气湍流扰动的有效手段^[1-3]。其中,波前探测器作为自适应系统的眼睛,能够实时探测受大气湍流影响的畸变波前。夏克-哈特曼探测器(Shack-Hartmann wavefront sensor, SHWFS)是最常用的一种波前探测器^[4]。通过微透镜阵列分割波前,得到湍流波前在 X、Y 方向的斜率 G_x 和 G_y ,实现波前测量。目前 SHWFS 的子孔径数目通常为 100~300 个左右,但随着望远镜口径的增大、分辨率的提高以及测量数据的增大,波前探测的压力会越来越大:一方面要求 SHWFS 数目增多,对硬件要求提高;另一方面测量数据的增多,对数据的传输和存储带来不小的压力。针对上述问题,文献[5-6]将压缩感知技术用于大气湍流波前数据测量,通过随机测量,减少数据量,经过后期重构算法,得到完整的波前信息。压缩感知技术突破 Nyquist 采样定理的限制,减少 SHWFS 的测量数据量和降低高硬件要求。

压缩感知^[7-12]的基本思想是:信号在某一变换域下具有稀疏性,利用一个与稀疏基不相关的观测矩阵将高维信号映射到低维空间上,得到稀疏随机测量值,再通过优化求解,用这些低维测量值重建出高维信号。信号具有稀疏性是应用压缩感知的前提。文献[6]直接采用泽尼克(Zernike)基作为稀疏基,讨论了不同压缩比下湍流波前的测量性能,对大气湍流波前压缩感知测量进行了研究,但未涉及湍流波前信号的稀疏性及其稀疏基的建立。

本文研究了大气湍流波前的稀疏性,根据大气湍流的统计特性,在频域内对湍流功率谱作黄金分割采样,建立符合大气湍流物理特征的稀疏基(golden section, GS),并与 Zernike 基、傅里叶基(discrete fourier transform, DFT)及冗余傅里叶基(over complet DFT, ODFT)的稀疏表示性能进行比较,在此基础上,以 GS

基作为训练基的初始字典,进行 K 奇异值分解(K singular value decomposition, KSVD)字典训练^[19],得到 KSVD-GS 训练基对湍流波前的稀疏表示。

2 理论

2.1 大气湍流波前及斜率的模拟产生

本文采用功率谱反演法^[13-14]模拟二维条件下大气湍流随机相位分布 $\varphi(x, y)$, 即:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=-N+1}^{n=N} \sum_{m=-N+1}^{m=N} \Phi_k(f_x(m), f_y(n)) \cdot \mathbf{h}(f_x(m), f_y(n)) \cdot \exp(j2\pi(xf_x(m) + yf_y(n))), \quad (1)$$

其中: $\mathbf{h}(f_x(m), f_y(n))$ 为复高斯随机数矩阵, 大气湍流功率谱密度函数是 $\Phi_k(f_x(m), f_y(n))$:

$$\Phi_k(f_x, f_y) = 0.023 \cdot r_0^{-5/3} \cdot f^{-11/3}. \quad (2)$$

采用叠加次谐波方法补偿低频不足:

$$\phi_{SH}(m, n) = \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 R(m', n') \cdot f(m', n') \cdot \exp\left(j2\pi \cdot 3^{-p} \left(\frac{mm'}{N} + \frac{nn'}{N}\right)\right),$$

$$f(m', n') = C \cdot 3^{-2p} \cdot r_0^{-5/6} \cdot (f_{lx}^2 + f_{ly}^2), \quad (3)$$

其中: p 为叠加的次谐波级数。图 1(a)为一帧大气湍流随机相位屏模拟结果。模拟条件:相位屏长 $D=2$ m, 大气相干长度 $r_0=0.1$, 网格点 $N \times N=256 \times 256$ 。图 1(b)为 300 幅大气湍流随机相位屏的相位结构函数的统计结果,与相位结构函数理论曲线吻合。

SHWFS 是通过测量湍流波前在 X、Y 方向上的斜率 G_x 和 G_y , 重构出波前相位分布。对大气湍流随机相位分布为 $\varphi(x, y)$, 用式(4)和式(5)计算波前斜率:

$$G_x = \frac{\Delta\varphi(x, y)}{\Delta x \times (D/N)}, \quad (4)$$

$$G_y = \frac{\Delta\varphi(x, y)}{\Delta y \times (D/N)}. \quad (5)$$

图 2(a), 图 2(b)是图 1(a)表示的相位屏在 X、Y 方向的相应斜率 G_x 和 G_y 。

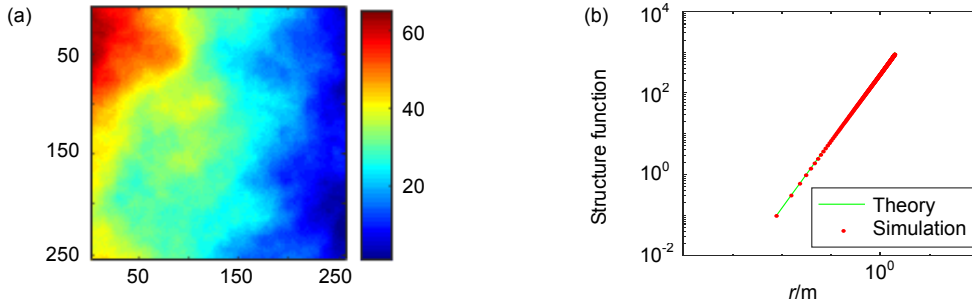


图 1 大气湍流相位屏及相位结构函数。(a) 湍流相位屏; (b) 相位结构函数对数图

Fig. 1 Atmospheric turbulence phase screen and structure function of logarithmic. (a) Atmospheric turbulence; (b) Structure function logarithmic

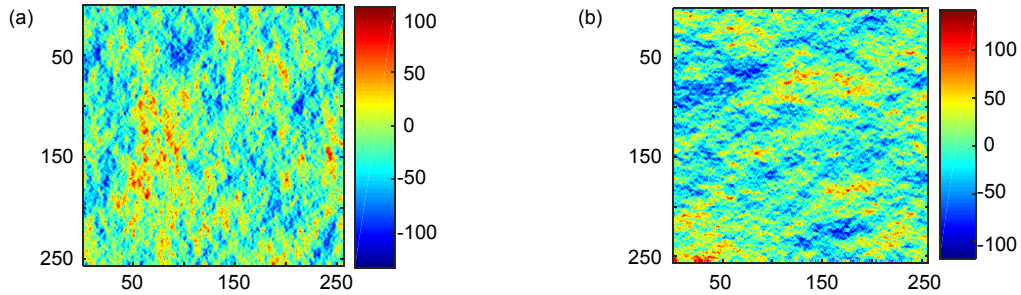


图 2 湍流波前 X、Y 方向的斜率。(a) 波前 X 方向斜率 G_x ; (b) 波前 Y 方向斜率 G_y

Fig. 2 The turbulent wavefront gradient in X, Y direction. (a) Wavefront X-direction gradient G_x ; (b) Wavefront Y-direction gradient G_y

2.2 GS 稀疏基的生成原理

定义基函数 $\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_K, \Psi_n]$, 将每列波前斜率 G_k (下文中斜率统一使用 G 表示, G_k 表示第 k 列斜率) 在该基函数下进行分解, 每列信号可以表示为若干个系数乘以对应的基函数的列相加得到, 公式表示如下:

$$G_k = \sum_{i=1}^N \alpha_{ki} \Psi_i = \alpha_{k1} \Psi_1 + \alpha_{k2} \Psi_2 + \dots + \alpha_{kn} \Psi_n = \Psi \alpha_k \quad (6)$$

其中: 系数 $\alpha_k = [\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kn}]^T$, Ψ_i 是基函数的列向量, α_{ki} 乘以对应的 Ψ_i 再将各项相加得到所表示的信号。如果 G_k 是稀疏可压缩的, 则 α_k 中的非零系数个数是 K 个 ($K \ll N$) 其余的 $N-K$ 个系数几乎接近于零。 K 值越小, 信号的稀疏性越好, 所需测量数据量越少。

将式(6)写成矩阵形式, 即:

$$G = \Psi \alpha \quad (7)$$

其中: $\Psi \in R^{N \times M}$, $\alpha \in R^{N \times M}$, α 中有 $K \times N$ 个系数不为零。

式(7)中, 稀疏基 Ψ 不同, 对应的系数 α 不同, 对波前斜率 G 进行稀疏分解就是求解各列波前斜率在该稀疏基下的分解系数。

本文先限定稀疏基的系数 α 的个数 $K \times N$ 个, 计算不同 K 值下的各类稀疏基 Ψ 对波前斜率稀疏表示性

能, 采用正交匹配追踪算法(orthogonal matching pursuit, OMP)进行稀疏分解, 其基本原理数学表征^[15]:

$$\min \|\alpha_k\|_2 \quad \text{s.t.} \quad G_k = \sum_{i=1}^K \alpha_{ki} \Psi_i \quad (8)$$

根据大气湍流的统计特征, 大气湍流能量在频域内的分布是极不均匀的, 主要集中在低频部分, 因此表征大气湍流波前斜率的基函数应该以低频量为主。利用黄金分割法^[16]在大气湍流功率谱函数上选取更能表征波前特征的频率点。

要减少稀疏分解的计算量, 首先确定基函数 Ψ 的频率范围为 $(-f_{\max}, f_{\max})$ 来调整 Ψ 的大小。

定义最大、最小频率为

$$f_{\min} = \frac{1}{1000D} \quad (9)$$

$$f_{\max} = 1000 \quad (10)$$

确定频率对应的采样误差函数(用 E_{sh} 表示)为

$$\begin{cases} \Phi_\varphi(f) = 0.023 \cdot f^{-11/3} \\ E(f_1) = \int_{f_0}^{f_2} [\Phi_\varphi(f_1)]^{0.5} df_1 \\ E_d(f_1) = [\Phi_\varphi(f_1)]^{0.5} (f_2 - f_0) \\ E_{sh} = \frac{E(f_1) - E_d(f_1)}{T_{pn}/f_1} \end{cases} \quad (11)$$

运用式(11)的 E_{sh} 进行判断,上述算法流程见图 3。根据图 3,得到特征频率点集合 $U=[u_1, u_1, \dots, u_3]$, 将特征频率点代入式(12), 得到湍流波前在二维空间基函数 $\Psi(m, n)$:

$$\Psi(m, n) = \frac{1}{\sqrt{C}} \sum_{u=u_1}^{u_m} \sum_{v=u_1}^{u_n} c \cdot e^{-j(mu+nv)}, 0 < m, n \leq N, \quad (12)$$

其中: C 为归一化系数。将 $\Psi(m, n)$ 称为黄金分割稀疏基(golden section basis, GS)。

2.3 其它几种稀疏基的生成原理

为了分析 GS 基对湍流波前斜率信号的稀疏表示性能, 本文同时生成其他几种稀疏基进行对比。

2.3.1 傅里叶基

完备傅里叶基(discrete Fourier transform, DFT, 用 T_{DFT} 表示)可以表示为

$$T_{DFT}(k, n) = \sqrt{\frac{1}{N}} \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right), 0 < k, n \leq N. \quad (13)$$

根据式(13)建立的 DFT 基缺少低频量。因此, 可以对 DFT 进行细分处理, 生成过完备傅里叶基(over complete DFT basis, ODFT)增加基函数中的低频原子。根据图像稀疏表示的要求, 稀疏基的行数要和表示对象的行数保持一致, 引入克罗内克函数(Kronecker)首先生成一个大小为 $\sqrt{N} \times 4\sqrt{N}$ 的 DFT 矩阵, 将其代入克罗内克函数生成 ODFT(用 T_{ODFT} 表示), 表达式:

$$T_{ODFT} = \text{kron}(T_{DFT}, T_{DFT}), \quad (14)$$

T_{ODFT} 的大小为 $N \times 16N$ 。

2.3.2 Zernike 基

在大气湍流波前 φ 表示中, 常把其表示为泽尼克(Zernike)多项式的组合, Zernike 多项式的定义^[17]:

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k Z_k(x, y). \quad (15)$$

以式(15)为基础, 计算各项 Zernike 多项式, 基函数的每一列表示一项多项式, 作为基函数的一个原子。

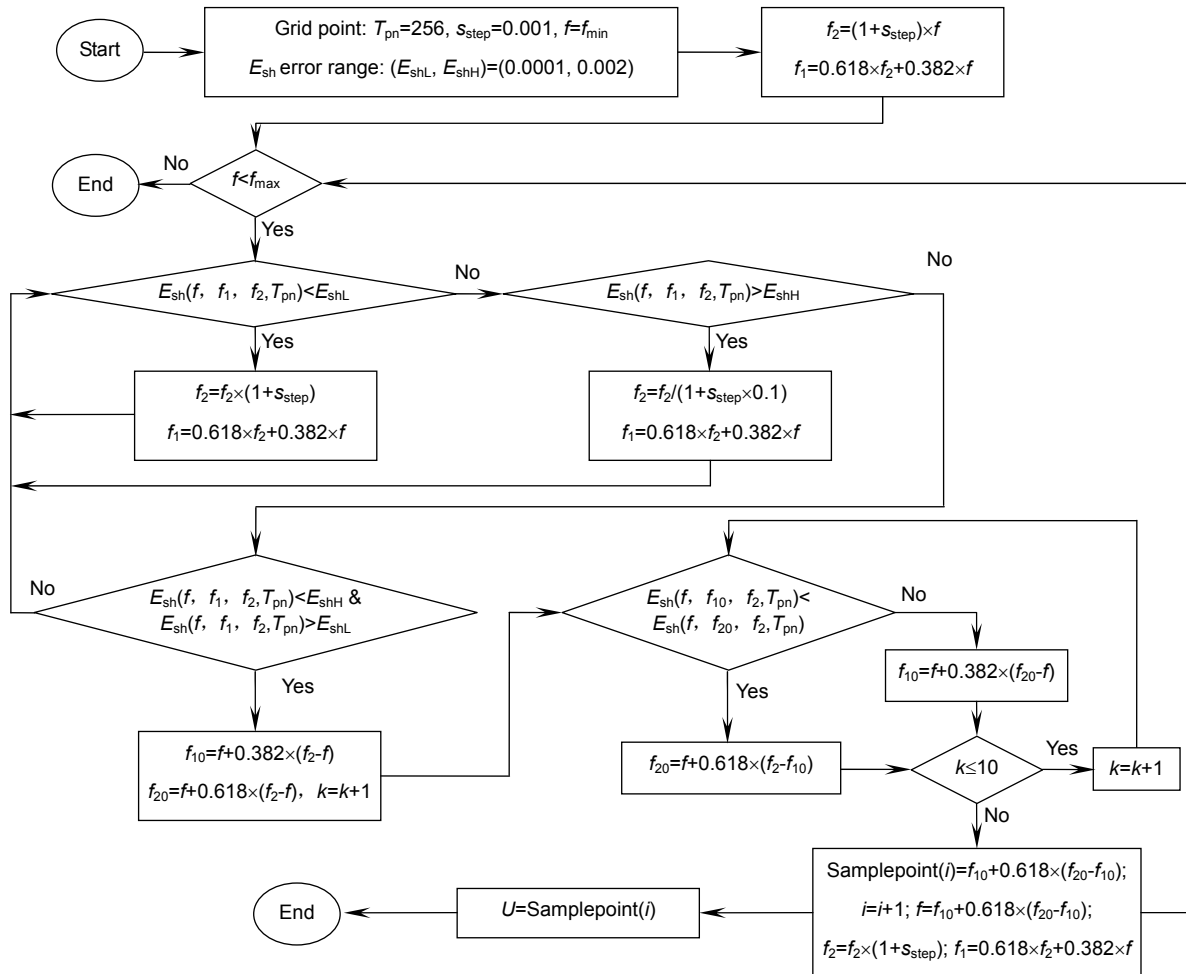


图 3 黄金分割法流程图

Fig. 3 Flowchart of golden section method

注意到, Zernike 多项式是定义在单位圆域内的函数, 对圆域内的各项 Zernike 多项式截取方形区域, 最后构成一个 $N \times N$ 大小的完备 Zernike 基。

3 仿真结果与分析

进行了一系列的仿真实验用于分析上述基函数对波前斜率信号的稀疏表示效果。

利用式(1)~式(3)模拟生成一系列的大气湍流随机相位屏 φ , 并根据式(4)和式(5)计算得到湍流波前斜率分布 G_x 和 G_y 。在不同的基函数下, 利用 OMP 算法得到稀疏分解后的斜率 G_x' 、 G_y' , 再利用区域法重构^[18]波前相位分布 φ' , 最后比较 φ 和 φ' 。

为了评价稀疏表示后重构出的 φ' , 定义了两个评价指标。

1) 峰值信噪比(peak signal to noise ration, PSNR, 用 R_{PSNR} 表示), PSNR 的定义为

$$R_{\text{PSNR}} = 10 \times \lg \left(\frac{(\max(\varphi(i, j)) - \min(\varphi(i, j)))^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\varphi(i, j) - \varphi'(i, j))^2} \right) \quad (16)$$

PSNR 是一种客观评价原始图像与重构图像的标准, 当 PSNR 的值越大, 表示稀疏重构图像与原图像越接近, 重构效果越好。

2) 平均绝对误差占空比(mean absolute error ratio, MAER, 用 R_{MAER} 表示)

为了更加客观地评价稀疏表示的性能, 本文定义平均绝对误差占空比(MAER)作为第二个评价指标。MAER 是 φ 与 φ' 相减的误差绝对值的平均值与原始图像绝对值平均值的比, 定义为

$$R_{\text{MAER}} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\varphi(i, j) - \varphi'(i, j)|}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\varphi(i, j)|} \quad (17)$$

MAER 表示误差图像的能量占原图能量的比值。当 MAER 值越小, 表明稀疏重构得到的图像越接近于原始图像。在比较 PSNR 的基础上, 再比较图像的 MAER 的大小, 可以更加充分对稀疏表示图像的性能进行评价。

首先分析稀疏系数 K 值相等条件下, GS、DFT、ODFT 及 Zernike 基对湍流波前斜率的稀疏分解性能。图 4 为其中的一个仿真实验结果, 采用柯尔莫哥洛夫功率谱模型, 生成大气湍流随机相位屏 $D=2$, $r_0=0.1$, 网格点数 $N \times N=256 \times 256$; 规定 $K=20$, 即每列波前斜

率信号在稀疏基下进行分解, 分解后的非零稀疏个数为 K 。图 4(a)、4(c)、4(e)、4(g)分别为采用 DFT、ODFT、Zernike 以及 GS 基函数进行稀疏分解, 再利用分解后的斜率值重构出湍流相位分布; 图 4(b)、4(d)、4(f)、4(h)为重构相位相对原始相位分布的残差分布。

当稀疏系数个数是 $K \times N=20 \times 256$, 即 $K=20$ 时, 由图 4 的残差图可以看出 GS 的误差范围明显小于其他稀疏基。分别计算各种基函数稀疏分解后的图像的 PSNR 和 MAER, GS 稀疏基的 PSNR 高于其他稀疏基 6 dB, MAER 值低于其他稀疏基 0.03。

其次, 分析不同稀疏基对信号的稀疏表示性能随着 K 值的变化情况, 见图 5。分别比较 PSNR 和 MAER 随着 K 的变化曲线, 其中 Zernike 稀疏基相较于其他稀疏基的稀疏表示性能最差, 验证了 Zernike 可以较好表示低频特性的特点, 且随着 K 的增大, 重构误差提高的速度明显低于其他基函数。ODFT 基比 DFT, PSNR 提高了 0 dB ~ 3 dB, MAER 降低了 0~0.03, 虽然性能有所提高, 但基函数包含的原子数目增大, 计算量会相应增加。相较于其他的稀疏基, 在低 K 值下, GS 的 PSNR 和 MAER 的指标明显优于其他基函数。随着 K 的增大, ODFT 的性能略好于 GS, 这个问题完全可以通过增大 GS 的冗余度得到改善。

除了增大 GS 的冗余度的方法之外, 还可以通过训练完备 GS 基来构造学习完备基, 使 GS 的稀疏表示性能进一步提高。下面以 GS 作为训练基的初始字典, 进行 KSVD 字典训练^[19], 得到 KSVD-GS 训练基。图 6 为 KSVD-GS 对信号稀疏分解的 PSNR 和 MAER 值随着 K 的变化曲线, 并与 GS 的结果进行对比。KSVD-GS 的性能优于 GS。

除了大气湍流的影响, 波前探测结果还不可避免受到噪声的污染, 本文使用高斯白噪声, 改变噪声图像的信噪比(signal noise ration, SNR), 分析各稀疏基下信号稀疏分解的鲁棒性。仿真实验结果如图 7 所示, 分析 PSNR 和 MAER 可以看出, GS 和 KSVD-GS 的稀疏表示仍优于其他稀疏基, 并且 GS 的鲁棒性要优于其他稀疏基。

模拟不同强度的大气湍流随机相位屏, 重复上述实验, 结果完全符合上述实验结论, 大气湍流强度的改变对实验结果没有明显影响。表 1 是对 60 幅大气湍流随机相位屏的仿真实验结果。同样在 $K=20$ 条件下, 对比五种稀疏基对信号稀疏分解的 PSNR、MAER 值以及稀疏分解运行时间。GS 的稀疏表示性能优于其

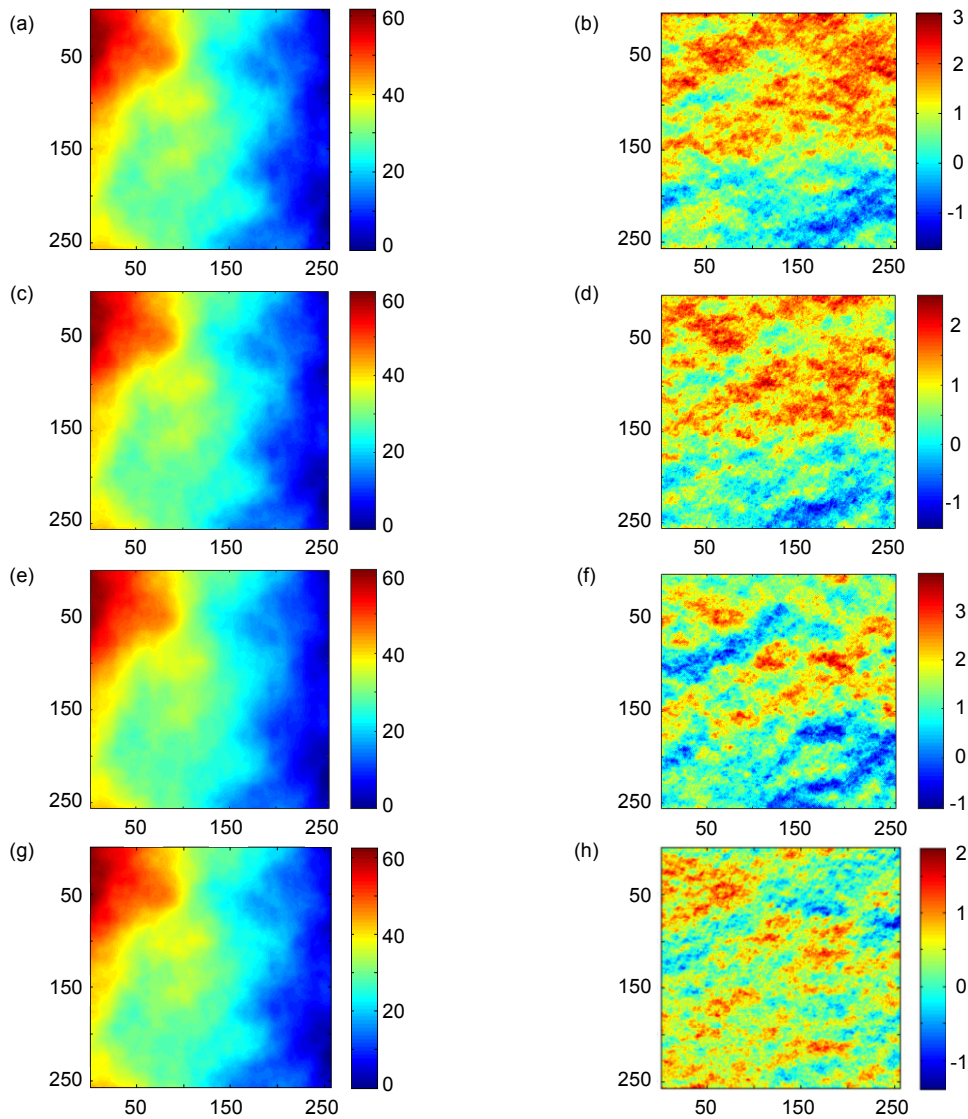


图 4 在稀疏系数是 20×256 下各稀疏基复原的湍流及误差图。(a) DFT 复原湍流, PSNR 为 34.45; (b) DFT 湍流误差, MAER 为 0.038; (c) ODFT 复原湍流, PSNR 为 35.56; (d) ODFT 湍流误差, MAER 为 0.034; (e) Zernike 复原湍流, PSNR 为 32.82; (f) Zernike 湍流误差, MAER 为 0.047; (g) GS 复原湍流, PSNR 为 40.29; (h) GS 湍流误差, MAER 为 0.019.

Fig. 4 When the sparse coefficient is 20×256 the restored turbulence and the error graph in each sparse basis. (a) DFT restored turbulence, PSNR is 34.45; (b) DFT error of turbulence, MAER is 0.038 ; (c) ODFT restored turbulence, PSNR is 35.56; (d) ODFT error of turbulence, MAER is 0.034; (e) Zernike restored turbulence, PSNR is 32.82; (f) Zernike error of turbulence, MAER is 0.047; (g) GS restored turbulence, PSNR is 40.29; (h) GS error of turbulence, MAER is 0.019.

表 1 $K=20$ 时不同稀疏基的稀疏表示性能及运行时间

Table 1 The sparse decomposition performance and running time in each sparse basis when $K=20$

Basis	PSNR/dB	MAER	Time/s
DFT	36.9066	0.0289	1.735
ODFT	37.252	0.0280	2.430
Zernike	34.837	0.0393	0.8436
GS	39.1987	0.0236	0.8666
KSVD-GS	38.7901	0.0251	0.8369

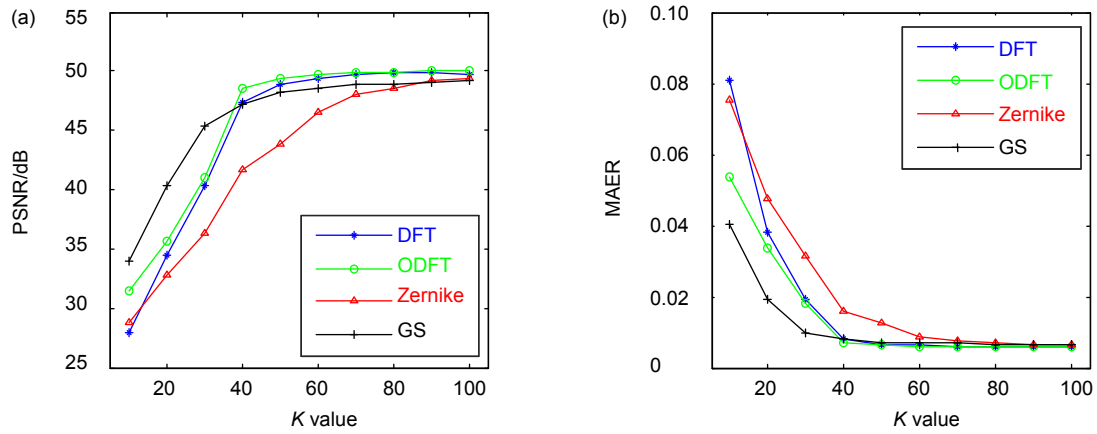


图 5 各稀疏基在不同稀疏系数下的比较。(a) 不同稀疏系数下的 PSNR; (b) 不同稀疏系数下的 MAER
 Fig. 5 The comparison of each sparse basis under different sparse coefficient. (a) PSNR in different sparse coefficient; (b) MAER in different sparse coefficient

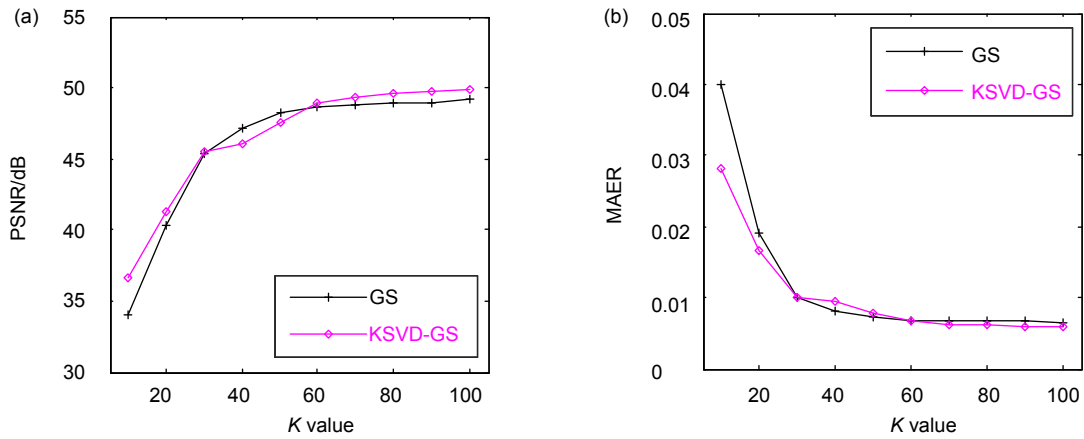


图 6 各个稀疏基在不同稀疏系数下的比较。(a) 不同稀疏系数下的 PSNR; (b) 不同稀疏系数下的 MAER
 Fig. 6 The comparison of each sparse basis under different coefficient. (a) PSNR in different sparse coefficient; (b) MAER in different sparse coefficient

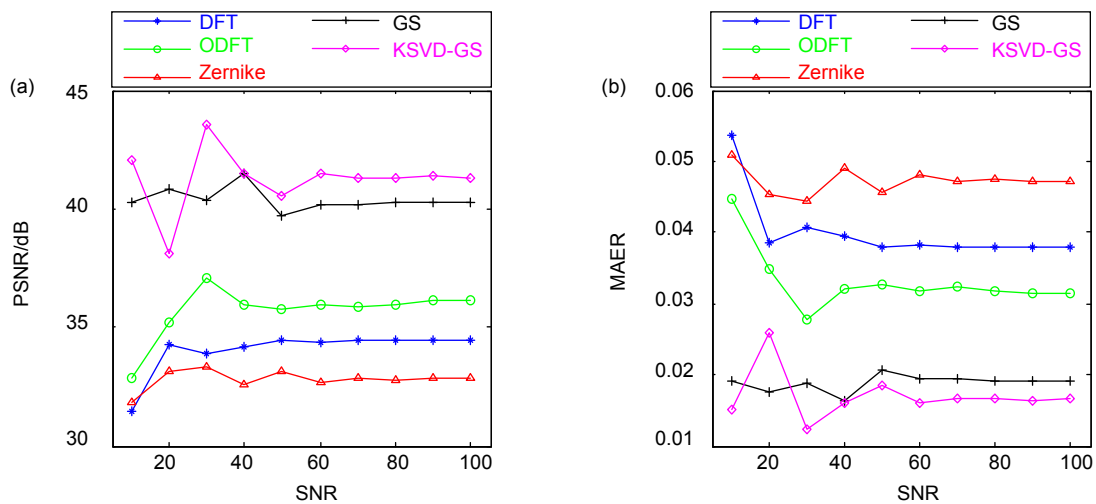


图 7 各个稀疏基在不同噪声下的比较。(a) 不同稀疏系数下的 PSNR; (b) 不同稀疏系数下的 MAER
 Fig. 7 The comparison of different sparse basis under different SNR. (a) PSNR of different sparse coefficient; (b) MAER of different sparse coefficient

他稀疏基,对相同大小的完备基来讲,Zernike基与GS的计算速度均高于DFT。GS在稀疏表示效果和计算时间方面都表现出良好的性能。

4 结 论

本文对压缩感知技术在波前测量中的应用进行了初步探索,研究了大气湍流波前斜率的稀疏性。压缩感知信号稀疏表示的基函数一方面决定信号的稀疏测量量,另一方面会影响稀疏信号的重建精度。本文根据大气湍流统计特征,采用黄金分割法在湍流功率谱上选取基函数的特征频率点,建立完备基GS,进行了湍流波前斜率信号的稀疏分解实验,并与DFT、ODFT和Zernike完备基进行了比较,结果表明:GS能够很好地对波前斜率进行稀疏表示;在此基础上,对GS进行学习训练,得到训练稀疏基KSVD-GS,进一步提高GS对湍流信号的稀疏分解性能。

当然,本文仅对压缩感知技术在波前探测中的应用进行了初步探索,要真正将该技术用于波前测量上,还要进行大量的理论和实验研究。

参考文献

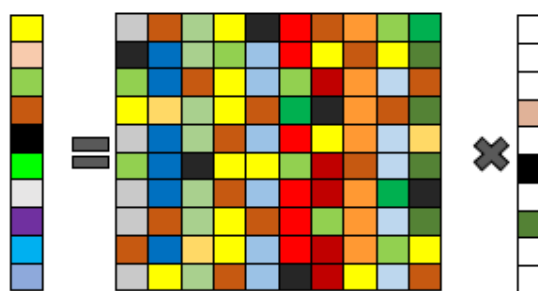
- [1] Xian H. Design and optimization of wavefront sensor for adaptive optics system[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2008.
鲜浩. 自适应光学系统波前传感器设计与优化[D]. 成都: 电子科技大学, 2008.
- [2] Cao Z L, Mu Q Q, Xu H Y, et al. Open loop liquid crystal adaptive optics systems: progresses and results[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2016, **45**(4): 0402002.
曹召良, 穆全全, 徐焕宇, 等. 开环液晶自适应光学系统: 研究进展和结果(英文)[J]. *红外与激光工程*, 2016, **45**(4): 0402002.
- [3] Lu C M, Rao C H, Huang H M, et al. Simulation of an astronomical adaptive optics imaging telescope[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2006, **33**(1): 20–23.
陆长明, 饶长辉, 黄惠明, 等. 天文学自适应光学成像望远镜的模拟[J]. *光电工程*, 2006, **33**(1): 20–23.
- [4] Jiang Z L. Study on characteristics and applications of Hartmann wavefront sensor[D]. Wuhan: Wuhan Institute of Physics and Mathematics of Chinese Academy of Sciences, 2005.
蒋志凌. 哈特曼波前传感器特性和应用研究[D]. 武汉: 武汉物理与数学研究所, 2005.
- [5] Rostami M, Michailovich O, Wang Z. Image Deblurring using derivative compressed sensing for optical imaging application[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, **21**(7): 3139–3149.
- [6] Polans J, McNabb R P, Izatt J A, et al. Compressed wavefront sensing[J]. *Optics Letters*, 2014, **39**(5): 1189–1192.
- [7] Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(2): 489–509.
- [8] Guan R. The sparse representation method based on compressed sensing[D]. Taiyuan: North University of China, 2012.
管蓉. 基于压缩感知的图像稀疏表示方法[D]. 太原: 中北大学, 2012.
- [9] Xu Y J. Dictionary design based on sparse representation of signals[D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2013.
徐勇峻. 基于信号稀疏表示的字典设计[D]. 南京: 南京理工大学, 2013.
- [10] Lv F X, Zhang J C, Wang Q, et al. Adaptive recovery algorithm for compressive sensing based on Fourier basis[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2014, **40**(4): 544–550.
吕方旭, 张金成, 王泉, 等. 基于傅里叶基的自适应压缩感知重构算法[J]. *北京航空航天大学学报*, 2014, **40**(4): 544–550.
- [11] Liu D H. Research on sparse signal decomposition and compressed sensing theory[D]. Xi'an: Xidian University, 2009.
刘丹华. 信号稀疏分解及压缩感知理论研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2009.
- [12] Yin H, Song X, Yan Y. Performance on sparse representation of star images[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2015, **23**(2): 573–581.
尹航, 宋新, 闫野. 星图的稀疏表示性能[J]. *光学精密工程*, 2015, **23**(2): 573–581.
- [13] Zhang Z L. Research on the simulation system of indoor atmospheric turbulence[D]. Taiyuan: Taiyuan University of Technology, 2017.
张智露. 室内大气湍流模拟系统的研究[D]. 太原: 太原理工大学, 2017.
- [14] Cai D M, Wang K, Jia P, et al. Sampling methods of power spectral density method simulating atmospheric turbulence phase screen[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, **63**(10): 104217.
蔡冬梅, 王昆, 贾鹏, 等. 功率谱反演大气湍流随机相位屏采样方法的研究[J]. *物理学报*, 2014, **63**(10): 104217.
- [15] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, **53**(12): 4655–4666.
- [16] Jia P, Cai D M, Wang D, et al. Simulation of atmospheric turbulence phase screen for large telescope and optical interferometer[J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2015, **447**(4): 3467–3474.
- [17] Wang Q T, Tong S F, Xu Y H. On simulation and verification of the atmospheric turbulent phase screen with Zernike polynomials[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, **42**(7): 1907–1911.
王奇涛, 佟首峰, 徐友会. 采用Zernike多项式对大气湍流相位屏的仿真和验证[J]. *红外与激光工程*, 2013, **42**(7): 1907–1911.
- [18] Zhang Q, Jiang W H, Xu B. Study of Zonal wavefront reconstruction adapting for Hartmann-Shack wavefront sensor[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 1998, **10**(2): 229–233.
- [19] Aharon M, Elad M, Bruckstein A. RMK-SVD: an algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **54**(11): 4311–4322.

Sparse decomposition of atmospheric turbulence wavefront gradient

Li Juanjuan¹, Cai Dongmei^{1*}, Jia Peng¹, Li Can²

¹Institute of Physics and Optoelectronics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan, Shanxi 030024, China;

²Institute of Information Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan, Shanxi 030024, China



Signal sparse decomposition

Overview: In astronomical imaging observation, the image quality of observation object decreases because of the influence of atmospheric turbulence and noise. Adaptive optics technique is an effective method to correct atmospheric turbulence disturbance. Wavefront sensor, as the eye of the adaptive system, can detect the distorted wavefront which is affected by atmospheric turbulence in real time. As the aperture of the telescope expands, the resolution is improved and the compressive sensing technique is used to measure the atmospheric turbulent wavefront gradient. Compressive sensing can greatly reduce the amount of measured data, and effectively reduce the pressure of data transmission and storage, which is good for real-time measurement of the turbulent wavefront. But this requires the measurement signal is sparse or can be sparsely represented in one transform domain. In this paper, the sparsity of atmospheric turbulence wavefront gradient signal is studied. Based on the statistical characteristics of atmospheric turbulence, the turbulent power spectrum is sampled by golden section (GS) in the frequency domain, to establish a sparse basis that conforms to the physical characteristics of the atmospheric turbulence, and this basis verifies the sparsity of turbulent wavefront gradient. The sparse decomposition of the wavefront gradient is simulated by using the GS sparse base, and the sparse decomposition effect on the wavefront gradient is compared under different bases such as discrete Fourier transform(DFT), over complete discrete Fourier transform (ODFT), and Zernike. Changing the sparse coefficient value K , the sparse representation performances of different sparse basis were discussed. Simulation results show that the sparse decomposition performance of sparse basis GS established in this paper is better than that other sparse bases, the PSNR of sparse basis is improved 2 dB~5 dB, and the MAER of sparse basis is 0~0.04 decreased. Then the gradients of 60 phase screens are selected for sparse decomposition, which fully verifies that GS basis effect is better than other sparse bases. On the GS basis, the training base (KSVD-GS) is obtained through K-singular value decomposition (KSVD) method, the sparse representation performance of the training basis of the wavefront gradient signal is analyzed, the PSNR is increased 2 dB, and the MAER is decreased 0.01. Finally, by increasing the noise and comparing the robustness of each sparse base, the robustness of the GS base is better than that of other sparse bases. In this paper, we mainly study the sparse decomposition of the wavefront gradient and provide the precondition for the application of compressive sensing.

Citation: Li J J, Cai D M, Jia P, *et al.* Sparse decomposition of atmospheric turbulence wavefront gradient[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2018, 45(2): 170616

Supported by Young Scientist Funds of National Natural Science Foundation of China (11503018) and Joint Research Fund in Astronomy (U1631133)

* E-mail: dm_cai@163.com