



DOI: 10.12086/oe.2018.170747

## 分数傅里叶变换理论及其应用研究进展

马金铭<sup>1,2</sup>, 苗红霞<sup>1,2</sup>, 苏新华<sup>1,2</sup>, 高畅<sup>1,2</sup>, 康学净<sup>3</sup>, 陶然<sup>1,2\*</sup><sup>1</sup>北京理工大学信息与电子学院, 北京 100081;<sup>2</sup>分数域信号与系统北京市重点实验室, 北京 100081;<sup>3</sup>北京邮电大学感知技术与产业研究院, 北京 100876

**摘要:** 分数傅里叶变换是傅里叶变换的广义形式, 提供了介于时域和频域之间的多分数域信号表征, 为非平稳信号处理和线性时变系统分析开辟了新途径, 应用十分广泛。本文首先总结近年来分数傅里叶变换的理论研究成果, 包括分数傅里叶变换的数值计算、衍生的离散分数变换、分数域采样、分数域滤波与参数估计、多分数域分析。然后介绍分数傅里叶变换在工程和实践中的应用, 包括雷达、通信、图像加密、光学干涉测量、医学、生物、机械仪器等。最后对分数傅里叶变换理论及其应用的未来研究方向进行展望。

**关键词:** 分数傅里叶变换; 数值计算; 离散分数变换; 采样; 滤波; 应用

**中图分类号:** O438

**文献标志码:** A

**引用格式:** 马金铭, 苗红霞, 苏新华, 等. 分数傅里叶变换理论及其应用研究进展[J]. 光电工程, 2018, 45(6): 170747

## Research progress in theories and applications of the fractional Fourier transform

Ma Jinming<sup>1,2</sup>, Miao Hongxia<sup>1,2</sup>, Su Xinhua<sup>1,2</sup>, Gao Chang<sup>1,2</sup>, Kang Xuejing<sup>3</sup>, Tao Ran<sup>1,2\*</sup><sup>1</sup>School of Information and Electronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;<sup>2</sup>Beijing Key Laboratory of Fractional Signals and Systems, Beijing 100081, China;<sup>3</sup>Institute of Sensing Technology and Business, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China

**Abstract:** The fractional Fourier transform (FRFT) is a generalization of the Fourier transform. The FRFT can characterize signals in multiple fractional domains and provide new perspectives for non-stationary signal processing and linear time variant system analysis, thus it is widely used in reality applications. We first review recent developments of the FRFT in theory, including discretization algorithms of the FRFT, various discrete fractional transforms, sampling theorems in fractional domains, filtering and parameter estimation in fractional domains, joint analysis in multiple fractional domains. Then we summarize various applications of the FRFT, including radar and communication signal processing in fractional domains, image encryption, optical interference measurement, medicine, biology, and instrument signal processing based on the FRFT. Finally we discuss the future research directions of the FRFT, including fast algorithm of the FRFT, sparse sampling in fractional domains, machine learning utilizing the FRFT, graph signal processing in fractional domains, and discrete FRFT based on quantum computation.

收稿日期: 2018-01-01; 收到修改稿日期: 2018-01-31

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(61331021); 国家自然科学基金创新研究群体科学基金项目(61421001); 国家自然科学基金青年科学基金项目(61331021, 61421001, 61701036)

作者简介: 马金铭(1993-), 女, 博士研究生, 主要从事分数域信号处理、采样的研究。E-mail: jinming\_ma@bit.edu.cn

通信作者: 陶然(1964-), 男, 博士, 教授, 国家杰出青年科学基金获得者, 长江学者特聘教授, 新世纪百千万人才工程国家级人选, 国家自然科学基金委创新研究群体带头人, 教育部创新团队带头人, 北京市自然科学基金优秀团队带头人, 研究方向为分数域信号与信息处理理论及其在雷达、通信等领域的应用, 包括分数域采样与快速算法、数字滤波与参数估计、多域分析与利用等。E-mail: rantao@bit.edu.cn

**Keywords:** fractional Fourier transform; discretization algorithms; discrete fractional transforms; sampling; filtering; applications

**Citation:** Ma J M, Miao H X, Su X H, *et al.* Research progress in theories and applications of the fractional Fourier transform[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2018, **45**(6): 170747

## 1 引言

有关分数傅里叶变换的研究最早始于 20 世纪 20 年代 Wiener<sup>[1]</sup>的工作。之后很长一段时期内都鲜有学者关注该领域,直至 1980 年, Namias<sup>[2]</sup>才从算子的角度给出了分数傅里叶变换的定义。基于 Namias 的工作, McBRIDE<sup>[3]</sup>于 1987 年修改了 Namias 的分数傅里叶算子,并分析了修正后的算子所具有的一些性质,使分数傅里叶变换的理论更加明确。Mendlovic 和 Ozaktas<sup>[4-5]</sup>于 1993 年给出了分数傅里叶变换的光学实现方法。随后,分数傅里叶变换迅速成为光学领域的研究热点<sup>[6]</sup>。Almeida<sup>[7]</sup>于 1994 年将分数傅里叶变换解释为时频平面的旋转,同时指出,正如傅里叶变换的实质是将信号表示为正弦信号的叠加,分数傅里叶变换的实质则是将信号表示为 Chirp 信号的叠加。Almeida 的这一研究成果极大促进了分数傅里叶变换在信号处理领域的发展。Ozaktas<sup>[8]</sup>于 1994 年分析了分数傅里叶变换与 Chirp 变换和小波变换之间的关系,并提出了分数域滤波的概念。Zayed<sup>[9]</sup>于 1996 年发现,利用简单的变量替换可以将分数傅里叶变换转化为傅里叶变换,并从该角度证明了分数傅里叶变换所满足的一些性质和定理。Cariolaro<sup>[10]</sup>于 1998 年提出了分数傅里叶变换的统一框架,并给出了针对各种类型信号的分数傅里叶变换的定义。2000 年之后,与分数傅里叶变换相关的理论研究有了突飞猛进的发展,主要研究成果集中在数值计算、采样、滤波与参数估计、多域分析等领域。其中,高效准确的数值计算方法和采样理论为分数域数字信号处理提供了可能;分数域滤波与参数估计则是分数傅里叶变换在工程实践中得以应用的核心和基础;分数域介于时域和频域之间,因此可以对信号在多个分数域进行分析,为信号处理提供了多个视角。与此同时,分数傅里叶变换也被广泛应用于工程实践,包括雷达、通信、图像加密、光学干涉测量、医疗、生物及机械仪器等。

虽然近年来已有若干与分数傅里叶变换相关的综述类文献<sup>[11-15]</sup>,但这些文献往往侧重于介绍分数傅里叶变换的数值计算方法以及分数傅里叶变换的应用等内容<sup>[12-14]</sup>。文献<sup>[11]</sup>虽然对采样、滤波与参数估计等问

题有所涉及,但随着研究的深入,许多新的研究成果涌现出来。除此之外,多域分析逐渐成为分数域信号处理的一个重要研究方向。随着理论研究的不断完善,分数傅里叶变换在工程实践中的应用得以推进,除了经典的雷达、通信、图像、光学等领域,分数傅里叶变换在医疗、生物和工业领域也显现出了很大的价值。本文的目的是对分数傅里叶变换理论及其应用研究成果做一个比较全面的介绍,其内容安排如下:第二部分介绍分数傅里叶变换的定义及性质;第三部分介绍分数傅里叶变换的数值计算方法;第四部分介绍由离散分数傅里叶变换衍生出来的各种离散分数变换;第五部分介绍与分数傅里叶变换相关的采样理论;第六部分介绍分数域滤波与参数估计理论;第七部分介绍多域分析理论;第八部分介绍分数傅里叶变换在雷达、通信、图像加密、光学干涉测量、医疗以及机械仪器领域的应用;第九部分为结论与展望。

## 2 定义及性质

### 2.1 分数傅里叶变换的定义

分数傅里叶变换可以从不同的角度来定义,并且各个定义之间是等价的<sup>[16]</sup>。每种定义方式都有其独特的物理内涵,可以根据实际应用选择特定的定义。目前最常用的定义是 Ozaktas<sup>[17]</sup>从积分变换角度给出的定义和 Namias<sup>[2]</sup>从特征分解角度给出的定义,下面介绍这两种定义。

**定义 1** 一维信号  $x(t)$  的  $p$  阶分数傅里叶变换从积分变换角度的定义为<sup>[17]</sup>

$$X_p(u) = F^p[x](u) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)K_p(t, u)dt \quad (1)$$

其中  $F^p$  是分数傅里叶变换算子,核函数  $K_p(t, u)$  的表达式为

$$K_p(t, u) = \begin{cases} A_\alpha e^{i(t^2 \cot \alpha/2 - ut \csc \alpha + u^2 \cot \alpha/2)}, & \alpha \neq n\pi \\ \delta(t-u), & \alpha = 2n\pi \\ \delta(t+u), & \alpha = (2n+1)\pi \end{cases} \quad (2)$$

其中  $A_\alpha = \sqrt{(1-i \cot \alpha)/2\pi}$ ,  $\alpha = p\pi/2$  代表时频平面的旋转角度。式(1)既可称作是信号  $x(t)$  的  $p$  阶分数傅里叶变换,也可称作是信号  $x(t)$  在  $\alpha$  角度下的分数傅里叶变换。因此,分数傅里叶变换算子和核函数也可

分别记做  $F^n$  和  $K_\alpha(t, u)$ 。可以看出, 分数傅里叶变换的分解基函数由单频正弦信号拓展为线性调频信号。线性调频信号在时域、频域及分数域表征如图 1 所示。

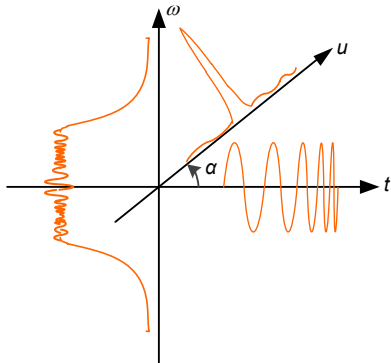


图 1 线性调频信号的时域、频域及分数域表示  
Fig. 1 Chirp signal in time, frequency, and fractional domain

接下来介绍从特征分解角度给出的定义。首先, 连续傅里叶变换对应的特征方程为

$$F[\varphi_n(t)] = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}n\right)\varphi_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

其中:  $F$  是傅里叶变换算子,  $\lambda_n = \exp(-in\pi/2)$  是傅里叶变换的特征值,  $\{\varphi_n(t), n = 0, 1, 2, \dots\}$  是归一化的 Hermite-Gaussian 函数, 同时也构成了傅里叶变换的一组完备正交基<sup>[6]</sup>。1980 年, Namias<sup>[2]</sup>将傅里叶变换的特征值推广为分数阶次, 定义分数傅里叶变换的特征值为  $\lambda_n = \exp(-ipn\pi/2)$ , 分数傅里叶变换的特征函数为傅里叶变换的特征函数, 从而得到了连续分数傅里叶变换对应的特征方程:

$$F^p[\varphi_n(t)] = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}pn\right)\varphi_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

进一步, 可得到分数傅里叶变换的核函数  $K_p(t, u)$  的谱展开式:

$$K_p(t, u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}pn\right)\varphi_n(t)\varphi_n(u) \quad (5)$$

基于上述讨论, 可以从特征分解的角度给出分数傅里叶变换的定义:

**定义 2** 一维信号  $x(t)$  的  $p$  阶分数傅里叶变换从特征分解角度的定义为<sup>[2,16]</sup>

$$X_p(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sum_{n=0}^{+\infty} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}pn\right)\varphi_n(t)\varphi_n(u) dt \quad (6)$$

或者

$$X_p(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(u) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp\left(-i\frac{\pi}{2}pn\right)\varphi_n(t) dt \right) \quad (7)$$

由一维分数傅里叶变换的定义, 可以得到二维信号  $x(t, s)$  的分数傅里叶变换的定义:

$$X_{p_1, p_2}(u, v) = F^{p_1, p_2}[x](u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t, s) K_{p_1, p_2}(s, t, u, v) dt ds \quad (8)$$

其中  $K_{p_1, p_2}(s, t, u, v) = K_{p_1}(s, u) \cdot K_{p_2}(t, v)$  是可分离的变换核函数。

## 2.2 分数傅里叶变换的性质

分数傅里叶变换作为傅里叶变换的广义形式, 不仅具备傅里叶变换的性质, 同时还具备一些其他的性质, 如下所示<sup>[16]</sup>。

1) 边界条件

$$F^0 = I, F^1 = F \quad (9)$$

2) 阶次可加性

$$F^{p_1} F^{p_2} = F^{p_1 + p_2} \quad (10)$$

3) 可逆性

$$(F^p)^{-1} = F^{-p} \quad (11)$$

4) 周期性

$$F^{p+4n} = F^p \quad (12)$$

5) 线性

$$F^p \left[ \sum_n c_n f_n(t) \right] = \sum_n c_n F^p [f_n(t)] \quad (13)$$

6) 酉性

$$\{F^p [f(t)]\}^H = F^{-p} [f(t)] \quad (14)$$

7) 交换性

$$F^{p_1} F^{p_2} = F^{p_2} F^{p_1} \quad (15)$$

8) 结合性

$$(F^{p_1} F^{p_2}) F^{p_3} = F^{p_1} (F^{p_2} F^{p_3}) \quad (16)$$

9) 帕塞瓦尔定理

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F^p [f(t)]|^2 du \quad (17)$$

更多关于分数傅里叶变换性质的见文献<sup>[16]</sup>。

除上述基本性质外, 分数傅里叶变换还有一个重要的性质, 那就是它可以看作时频平面的旋转, 如图 2 所示<sup>[7]</sup>。

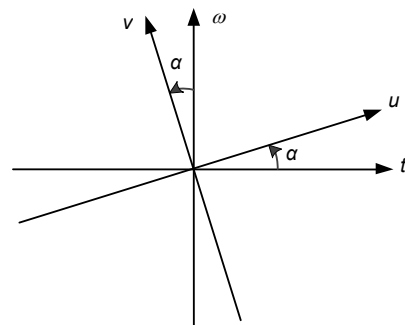


图 2 旋转  $\alpha$  角度的时频平面<sup>[7]</sup>  
Fig. 2 Time-frequency plane rotated by an angle  $\alpha$ <sup>[7]</sup>

1994 年, Ozaktas<sup>[18]</sup>指出分数傅里叶变换的 Wigner-Ville 分布(WVD)是由原信号的 WVD 旋转  $\alpha$  角度后得到的:

$$W_{x_p}(u, v) = W_x(u \cos \alpha - v \sin \alpha, u \sin \alpha + v \cos \alpha), \quad (18)$$

其中 WVD 的定义为

$$W_x(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{-iv\tau} d\tau. \quad (19)$$

除此之外, 分数傅里叶变换作为一种时频分析工具, 与模糊函数、Gabor 变换、Radon 变换等经典时频分析工具之间也存在类似式(18)~(19)的关系<sup>[19]</sup>。

### 3 数值计算

分数傅里叶变换的数值计算方法的研究重点包括以下几个方面: 提高计算效率, 使离散分数傅里叶变换的计算结果逼近连续分数傅里叶变换的结果, 保持连续分数傅里叶变换的性质等。近年来国内外学者对该领域进行了广泛研究, 提出了分数傅里叶变换的多种离散化算法, 包括: 采样型离散化算法、特征分解型离散化算法、线性加权型离散化算法、Chirp-z 变换型离散化算法、二次相位变换型离散化算法和群论型离散化算法等。本文主要介绍其中两类广泛应用的数值计算方法, 即采样型离散化算法和特征分解型离散化算法。其他类型的数值计算方法可参考文献[20-26]。

#### 3.1 采样型离散化算法

1996 年, Ozaktas 在文献[27]中提出了一种采样型离散化算法, 该算法将分数傅里叶变换算子分解成两个 Chirp 乘积和一个 Chirp 卷积三个简单算子的级联, 实现对信号的离散分数傅里叶变换的计算。然而在 Chirp 卷积的计算过程中需要用到复杂的 Fresnel 积分。为简化计算过程, Ozaktas<sup>[27]</sup>提出了该算法的另一种实现方法: 先对信号进行时域解调, 再对解调信号实施 Nyquist-Shannon 插值公式, 最后对分数域变量进行离散化。总体来说, Ozaktas 的采样型算法将信号的  $N$  个采样点映射为其分数傅里叶变换的  $N$  个采样点, 计算复杂度为  $O(N \cdot \log_2 N)$ , 具体需要  $2N + N \cdot \log_2 N$  次乘法操作, 与快速傅里叶变换相当, 具有计算速度快、精度高的优点。然而该算法在使用之前需要对原始信号进行量纲归一化, 且不满足阶次相加性和可逆性, 限制了其在工程实践中的应用。2000 年, Pei<sup>[28]</sup>通过对原信号和其分数傅里叶变换进行适当采样, 得到了分数傅里叶变换的另一种离散化算法。利用该算法得到的离散分数傅里叶变换具有正交性和可逆性,

只需进行两次 Chirp 乘积和一次快速傅里叶变换运算, 计算复杂度为  $O(N \cdot \log_2 N)$ , 具体需要  $2N + (N/2) \cdot \log_2 N$  次乘法操作, 是到目前为止计算复杂度最低的分数傅里叶变换数值计算方法。其缺点是不完全满足阶次可加性(但是可以利用一定的转换关系, 从一个域得到另一个域的结果), 而且需要对时域和分数域的采样间隔加以限制, 因此该算法对 Chirp 信号的聚集性比 Ozaktas 提出的采样型离散化算法要差<sup>[6]</sup>。

#### 3.2 特征分解型离散化算法

1982 年, Dickinson<sup>[29]</sup>通过引入与离散傅里叶变换(discrete Fourier transform, DFT)矩阵  $F$  可交换的矩阵  $S$ , 来求解 DFT 矩阵的特征向量, 并讨论了其特征值的多样性。1997 年, Pei<sup>[30]</sup>首先提出从 DFT 矩阵的特征值和特征向量出发, 构造离散分数傅里叶变换矩阵:

$$F^\alpha = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} e^{(-ik\alpha)v_k v_k^T}, & N \text{ 为奇数} \\ \sum_{k=0}^{N-2} e^{(-ik\alpha)v_k v_k^T} + e^{(-iN\alpha)v_N v_N^T}, & N \text{ 为偶数} \end{cases}, \quad (20)$$

其中:  $F^\alpha$  为离散分数傅里叶变换矩阵,  $\exp(-ik\alpha)$  为离散分数傅里叶变换矩阵的特征值, 其分配规则如表 1 所示<sup>[30]</sup>。  $v_k$  为离散分数傅里叶变换矩阵的特征向量。在计算  $v_k$  时, Pei 采用的是 Dickinson<sup>[29]</sup>的方法。  $S$  矩阵的特征向量是离散的 Mathieu 函数, 该函数是低阶连续 Hermite-Gaussian 函数的良好逼近, 但是对高阶连续 Hermite-Gaussian 函数的逼近效果不够精确<sup>[31]</sup>。为此, Pei<sup>[32]</sup>在 2006 年提出了一种新的  $F$  可交换矩阵  $T$ , 其特征向量比  $S$  矩阵的特征向量更加接近连续 Hermite-Gaussian 函数。更多有关可交换矩阵的文献可参考[33-35]。1999 年, Pei<sup>[36]</sup>提出了另一种计算离散分数傅里叶变换矩阵的特征向量的方法。该方法通过对连续 Hermite-Gaussian 函数进行采样, 得到一组离散向量, 再利用一种有效的误差消除方式来校准这组向量, 使其成为 DFT 矩阵的严格意义上的特征向量。

表 1 离散分数傅里叶变换特征值及其分配规则<sup>[30]</sup>

Table 1 Eigenvalues and their assignment rule of the discrete fractional Fourier transform (DFRFT) matrix<sup>[30]</sup>

$N$	离散分数傅里叶变换的特征值
$4m$	$\exp(-ik\alpha), k=0, 1, \dots, 4m-2, 4m$
$4m+1$	$\exp(-ik\alpha), k=0, 1, \dots, 4m-1, 4m$
$4m+2$	$\exp(-ik\alpha), k=0, 1, \dots, 4m, 4m+2$
$4m+3$	$\exp(-ik\alpha), k=0, 1, \dots, 4m+1, 4m+2$

同年, Pei 在文献[31]中提出了正交投影方法, 通过将离散向量组向矩阵  $S$  的特征向量构成的特征空间上进行投影, 也可以实现对离散向量组的校准。为使离散分数傅里叶变换满足酉性和阶次可加性, 需要进一步对校准后的离散向量组进行正交化处理。常用的向量正交化方法有 GSA(Gram-Schmidt algorithm)方法和 OPA(orthogonal procrustes algorithm)方法等<sup>[31]</sup>。在 Pei 的基础上, Candan 对采样连续 Hermite-Gaussian 函数法进行了更为深入的研究。2000 年, Candan<sup>[37]</sup>通过对二阶差分方程进行离散化处理得到离散的 Hermite-Gaussian 函数。随后, Candan<sup>[33]</sup>又在 2007 年研究了利用高阶差分方程来近似高阶 Hermite-Gaussian 函数的方法, 得到了更接近连续 Hermite-Gaussian 函数的 DFT 矩阵的特征向量。近年来, 特征分解型离散分数傅里叶变换的研究重点依然是通过寻找 DFT 矩阵的正交特征向量来提高变换的精度。2011 年, Candan<sup>[38]</sup>深入研究了 DFT 矩阵的特征结构。同年, Serbes<sup>[39]</sup>通过将多种可交换矩阵相结合, 构造出了一种新的可交换矩阵, 从而得到了更加精确的离散分数傅里叶变换。2013 年, Hanna<sup>[40]</sup>指出, 当 DFT 矩阵的阶数很大时, 其特征向量可能不是线性无关的。为此, Hanna 基于矩阵伪逆提出了一种一般化的特征向量批处理方法, 得到了更小的近似误差。2017 年, Neto<sup>[41]</sup>构造了封闭形式的 Hermite-Gaussian 特征向量, 并讨论了特征向量相对于连续 Hermite-Gaussian 函数的收敛性。总体来说, 特征分解型离散化算法的优点为满足酉性、边缘性、阶次可加性等性质, 是目前分数傅里叶变换在严格意义上的离散化形式。其缺点是需要计算变换矩阵与输入信号的乘积, 计算复杂度较高, 为  $O(N^2)$ <sup>[6]</sup>。

通过以上讨论可知, 采样型离散化算法和特征分解型离散化算法各有优缺点, 见表 2。在实际应用中, 可以针对具体的需求选择相应的数值计算方法。例如, 采样型离散化算法计算复杂度较低, 被广泛应用于与分数傅里叶变换相关的采样和重构、多采样等理论研究中。另外在分数域滤波、Chirp 信号的检测与估计

等应用领域, 采样型离散分数傅里叶变换也体现出了优越的效果<sup>[6, 16, 42]</sup>。特征分解型离散化算法具有阶次可加性、酉性、可逆性等性质, 因此在图像加密等需要具备逆变换算法的领域中应用较多<sup>[6, 16, 43-45]</sup>。

## 4 离散分数变换

正弦变换、余弦变换和哈特莱变换都属于酉变换, 利用它们与傅里叶变换之间的关系, 可以对这些变换进行拓展研究, 从而定义出新的分数变换。1998 年, Pei<sup>[46]</sup>从特征分解的角度定义了分数哈特莱变换, 并解决了分数化过程中存在的特征值和特征向量的选取问题。基于 McClellan 和 Dickinson<sup>[47]</sup>的研究成果, Pei<sup>[48]</sup>在 2001 年研究了离散余弦变换和离散分数傅里叶变换的特征值以及特征向量之间的关系, 进而提出了 I-型离散分数余弦变换的定义。同时, Pei<sup>[48]</sup>也给出了他所定义的离散分数余弦变换和离散分数傅里叶变换之间的关系。随后, Pei<sup>[49]</sup>于 2002 年给出了一系列分数变换的定义, 其中包括分数余弦变换、分数哈特莱变换、线性正则余弦变换、线性正则哈特莱变换和简化分数哈特莱变换, 这些分数变换的定义都是基于经典变换的定义给出的。同年, Tseng<sup>[50]</sup>研究了一般化离散傅里叶变换、离散哈特莱变换和 IV-型离散傅里叶变换的特征值和特征向量的性质。基于离散余弦变换的结构特征, Tomaso<sup>[51]</sup>于 2006 年从另一个角度给出了离散分数余弦变换的定义。上述分数变换的核函数与离散分数傅里叶变换的核函数相似, 它们的变换矩阵之间往往也存在一定的关系, 因此有关分数变换的更为深入的研究大多集中在可交换矩阵、特征值和特征向量上<sup>[32, 52-53]</sup>。

希尔伯特变换是一种非常重要的信号处理工具, 在通信、图像边缘检测等领域有很多应用。1996 年, Lohmann<sup>[54]</sup>利用分数参数修正空间滤波器给出了分数希尔伯特变换的定义。同时, 他还基于分数傅里叶变换给出了分数希尔伯特变换的另一种定义, 并分析了这两种定义的性质以及它们的光学实现<sup>[54]</sup>。1998 年, Davis<sup>[55]</sup>研究了分数希尔伯特变换对一维矩形函数的

表 2 离散分数傅里叶变换算法的性质比较  
Table 2 Comparison of the properties of DFRFT algorithms

	酉性	阶次可加性	可逆性	逼近连续 FRFT	闭合式	计算复杂度
Ozaktas 采样型	×	×	×	√	×	$O(N \log_2 N)$
Pei 采样型	√	×	√	√	√	$O(N \log_2 N)$
特征分解型	√	√	√	√	×	$O(N^2)$

作用效果,并展示了其可选择的边缘增强的性能。基于特征分解型离散分数傅里叶变换的定义方式,Pei<sup>[56]</sup>于2000年提出了分数希尔伯特变换的离散化方法,该离散化定义能够逼近连续的分数希尔伯特变换,并且可以应用于数字图像边缘检测和数字通信。同年,Tseng<sup>[57]</sup>在分数希尔伯特变换域分析了有限和无限冲激响应的设计方法,该方法得到的单边带解析信号可用于节省通信带宽。同时,Tseng<sup>[57]</sup>指出,在单边带通信中,分数变换的阶次可以用作解调密钥,在数字图像处理中,二维分数希尔伯特变换可用于边缘检测。Tao<sup>[58]</sup>提出了广义分数希尔伯特变换的定义,利用该变换可以得到包含实信号的有效信息且不包含负谱的解析信号,进而将其应用于单边带通信。有关分数希尔伯特变换的理论研究尚未完善,与此同时,其在数字通信和数字图像处理中的应用有待进一步挖掘。

2006年,Hseu和Pei<sup>[59-60]</sup>率先提出了多参数分数傅里叶变换的定义。该变换将特征分解型离散傅里叶变换中的单个变换阶次替换成多维向量,保持特征分解型离散分数傅里叶变换的全部性质,因此可以将其看作是离散分数傅里叶变换的一种广义形式。在应用方面,基于多参数分数傅里叶变换的双随机相位编码可实现比分数傅里叶变换更高的安全性能。2008年,Lang<sup>[61]</sup>利用两个多维向量定义了一种线性加权型多参数分数傅里叶变换,并于2010年提出了相应的离散化算法<sup>[62]</sup>。与此同时,Lang基于张量积定义了二维多参数离散分数傅里叶变换,并将其应用于图像加密领域<sup>[62]</sup>。但是Lang所提出的多参数分数傅里叶变换具有周期性,这会导致图像加密时的密钥不唯一。为此,Ran<sup>[63]</sup>于2009年对Lang的定义进行了修正。2012年,Lang<sup>[64]</sup>又定义了一种保实多参数分数傅里叶变换,基于这种变换的图像加密算法对盲解密具有良好的鲁棒性<sup>[64]</sup>。2016年,Kang<sup>[65]</sup>将上述多参数分数变换统一到一个一般的理论框架中,并在该理论框架的基础上构造出了新的变换,将其应用于图像加密、图像特征提取等领域<sup>[65]</sup>。

Liu<sup>[66]</sup>率先提出了离散分数随机变换的定义。这种变换的特征值为离散分数傅里叶变换的特征值,特征向量则是通过构造对称随机矩阵得到的,因此信号经离散分数随机变换后得到的结果具有随机性,而这种随机性恰好可以用于图像加密。随后,Liu<sup>[67]</sup>又用类似的方式定义了随机分数余弦变换,并证明随机分数余弦变换可以看作是离散分数随机变换的一种特殊形

式。通过随机化分数傅里叶变换的核函数,Liu<sup>[68]</sup>定义了随机分数傅里叶变换,并讨论了其光学实现。Pei<sup>[69]</sup>通过随机化分数傅里叶变换的特征值和特征向量得到了随机分数傅里叶变换的另一种定义。在这种定义下,信号的随机分数傅里叶变换的幅度和相位也具有随机性。基于上述研究成果,Kang<sup>[70]</sup>于2015年提出了一种多通道随机离散分数傅里叶变换,并研究了该变换的性质和光学实现。

Pei<sup>[71]</sup>于1999年提出了离散分数哈达玛变换的定义,并分析了该变换所具有的性质。Tseng<sup>[72]</sup>随后研究了该变换的特征值和特征向量所具有的性质。Tao<sup>[73]</sup>于2009年定义了多参数离散分数哈达玛变换,分析了该变换所具有的性质,并将其应用于双随机相位编码中。Liu<sup>[74]</sup>于2008年提出了离散分数角变换的定义。该变换的特征值为分数余弦变换的特征值,特征向量取自一个由任意角度生成的正交矩阵列向量。Lammers<sup>[75]</sup>于2014年研究了分数Zark变换,并分析了该变换所具有的性质。

上述离散分数变换都是基于特征分解型离散分数傅里叶变换的定义方式得到的。这些分数变换体现了以离散分数傅里叶变换为核心的离散分数变换的多样性,同时也为分数域数字信号处理奠定了基础<sup>[6]</sup>。

## 5 采样

采样是信号处理中的一个基础理论问题。经典的Nyquist-Shannon采样定理解决了傅里叶域带限信号的采样与重构问题,然而对于傅里叶域宽带信号,例如Chirp信号,Nyquist-Shannon采样定理要求极高的采样率。考虑到傅里叶域宽带信号在分数域可能是窄带信号(如图3所示),此时利用分数傅里叶变换相关的采样定理可以大大降低采样率。分数傅里叶变换相

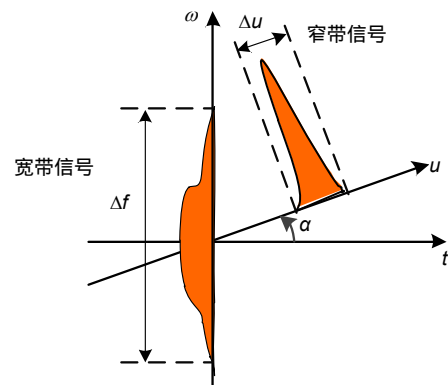


图3 分数域窄带信号

Fig. 3 Narrow-band signal in fractional domain

关的采样是指在时域对连续时间信号进行采样,然后在分数域对信号进行分析和重建。本节主要介绍与分数傅里叶变换相关的均匀采样定理、非均匀采样定理和多通道采样定理。其中也涉及到一些与线性正则变换相关的采样理论,其核心思想与分数傅里叶变换相关的采样理论一致。

### 5.1 均匀采样

均匀采样作为最基本的采样模型,是分数傅里叶变换相关的采样理论在早期的研究重点。Xia<sup>[77]</sup>最早在1996年提出了分数傅里叶变换相关的带限信号采样定理。Xia通过对一个分数域带限信号进行Chirp调制、然后对调制后的傅里叶域带限信号应用Nyquist-Shannon采样定理,最终得到信号重构公式:

$$x_r(t) = \sqrt{\frac{1+i \cot \alpha}{2\pi}} e^{-i \cot \alpha / 2t^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-i \cot \alpha / 2(nT)^2} \times \frac{\sin[u_r \csc \alpha(t-nT)]}{u_r \csc \alpha(t-nT)} \quad (21)$$

其中: $x_r(t)$ 代表重构信号, $u_r$ 代表信号的分数域带宽, $T = \pi \sin \alpha / u_r$ 是采样间隔。同年,Zayed<sup>[9]</sup>通过简单的变量替换,将分数傅里叶变换转化为傅里叶变换,结合经典的Nyquist-Shannon采样定理,得到了分数域带限信号的采样重构公式。在经典采样理论中,一个带宽有限的信号可以由时域采样点重构,同样地,一个时宽有限的信号也可以由傅里叶域采样点重构。在此基础上,Candan<sup>[78]</sup>在2003年得出一个重要结论:若一个信号在某个特定的分数域带宽有限,那么该信号可以由其他任意一个分数域内的采样点重构。上述采样理论基于傅里叶变换与分数傅里叶变换之间的关系,实际上,分数域带限信号的采样定理也可以从其他角度给出。1999年,Erseghe<sup>[79]</sup>从级数展开的角度给出了分数域带限信号的采样定理。为此,他引入了Chirp周期和分数傅里叶级数的概念,并证明了任意一个Chirp周期信号都可以表示为其分数傅里叶级数的展开。2012年,Wei<sup>[80]</sup>从帕塞瓦尔关系的角度给出了分数域带限信号的采样定理的证明。这些文献从多个角度对分数域带限信号的采样理论进行了研究,为更好地理解分数傅里叶变换相关的采样提供了帮助。

经典的Nyquist-Shannon采样定理表明,采样信号的频谱具有周期性,且周期为 $2\pi/T$ 。然而采样信号的分数谱特征与频谱特征有所不同。Deng<sup>[81]</sup>于2006年较早地研究了采样信号分数谱的延拓规律:在数学表达上,时域的乘积对应分数域的卷积;在物理概念

上,信号在时域采样对应分数谱在分数域做周期延拓。在此基础上,Meng<sup>[82]</sup>和Tao<sup>[83]</sup>先后于2007年和2008年对该问题进行了更加深入地研究,发现采样信号在分数域的幅度谱以 $2\pi \sin \alpha / T$ 为周期进行延拓,相位谱伴随二次相位调制。基于此发现,Meng<sup>[82]</sup>和Tao<sup>[83]</sup>分别提出了分数域带限信号的均匀采样定理,其重构公式与Xia<sup>[77]</sup>的重构公式类似。

采样率转换是多采样数字信号处理中的重要问题,包括时域抽取和零值内插两种情况。Meng<sup>[82]</sup>和Tao<sup>[83]</sup>先后研究了与分数傅里叶变换相关的采样率转换理论,主要工作包括:对时域抽取和零值内插信号在分数域进行了分析,并推导了分数域上的有理分数倍采样率转换定理。随后,Zhao<sup>[84]</sup>研究了线性正则域的采样率转换问题。

为进一步降低对采样率的要求,Zayed<sup>[85]</sup>于1999年指出,对于一个分数域带限信号,利用信号的采样值和信号的希尔伯特变换的采样值可以使采样率降至Nyquist率的一半。对于线性正则域的带限信号,Li<sup>[86]</sup>于2007年得出了类似的结论。

上述采样定理都要求信号是分数域带限的,然而现实生活中的许多信号在分数域都是非带限的,比如周期狄拉克流等具有有限新息率的信号<sup>[87]</sup>。Bhandari<sup>[88]</sup>于2010年在分数域研究了有限新息率信号的均匀采样和重构问题。同年,Liu在文献<sup>[89]</sup>中利用线性正则域梯形滤波器构造了一种在线性正则域非带限的信号,并给出了这种信号的采样和重构公式。上述文献所研究的分数域非带限信号都是特定类型的信号,对于更一般的分数域非带限信号,Shi<sup>[90]</sup>于2012年提出了函数空间中的采样和重构策略。函数空间中的采样定理以Riesz基作为信号分解的基底。之所以不选择sinc函数,是因为sinc函数的衰减速度较慢,不适合表征非带限信号。基于文献<sup>[90]</sup>,Shi和Liu<sup>[91-93]</sup>又对函数空间中的采样进行了一些后续研究。对于特定函数空间上的采样,Bhandari<sup>[94]</sup>于2012年研究了移不变空间中的采样理论,并通过引入分数Zark变换和分数泊松求和公式<sup>[95]</sup>,以一种更为简单的方式给出了与分数傅里叶变换相关的采样定理的证明过程。

上述研究成果奠定了与分数傅里叶变换相关的采样理论的基础。近年来对于采样定理的研究多集中于更为复杂的采样模型,如非均匀采样和多通道采样。

### 5.2 非均匀采样

随着研究的深入,人们发现在实际工程应用中,

数据采集系统的不精确常常会造成非均匀采样,从而带来不可忽视的误差。与分数傅里叶变换相关的非均匀采样理论的研究主要集中在两个方面:非均匀采样信号的重构和非均匀采样信号的谱分析。实际上,对于一般意义上的非均匀采样来说,采样点是完全随机的,在这种情况下重构原信号是非常困难的,因此在以往的研究中,都是针对某个特定的非均匀采样模型进行分析。本节主要介绍四个典型的非均匀采样模型,包括周期非均匀、时钟抖动造成的非均匀、由有限个点偏移造成的非均匀、一般非均匀。

1) 周期非均匀

周期非均匀采样是由于多路并行采样过程中各通道时基不一致导致的,即每个通道内的采样点都是均匀的,但由于每个通道的实际采样起始时刻与理想采样起始时刻之间可能存在偏差,导致了整体上的非均匀。其示意如图 4 所示<sup>[96]</sup>。若通道数为  $M$ ,则非均匀采样序列的采样时刻可以表示为

$$t_{kMT+m} = kMT + t_m, m = 0, 1, 2, \dots, M-1; k \in \mathbf{Z}, (22)$$

其中每个通道内的采样间隔都是  $MT$ ,  $t_m$  是每个通道的实际采样起始时刻。

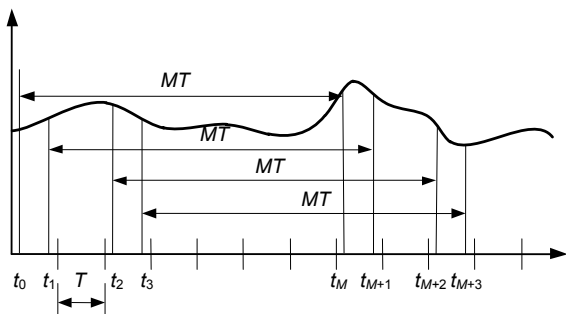


图 4 周期非均匀采样模型<sup>[96]</sup>  
Fig. 4 The model of periodic nonuniform sampling<sup>[96]</sup>

基于该模型, Tao<sup>[97]</sup>于 2007 年研究了非均匀采样信号的分数傅里叶数字谱特征,发现采样信号的分数谱在每个周期内不但包含信号原有的分数谱,还出现了均匀分布的伪谱。基于上述研究, Tao<sup>[96]</sup>提出了一种形式简洁的分数谱恢复算法。在周期非均匀采样模型的基础上,又延伸出多种新的采样模型。例如,  $N$  阶周期非均匀,该模型比周期非均匀更一般化的采样模型,其中每个通道的采样间隔可以是不一样的,但是  $N$  个通道的平均采样间隔需要满足采样定理的要求。基于该模型, Tao<sup>[97]</sup>给出了相应的重构公式。 Xu<sup>[98]</sup>在 2017 年提出的随机采样模型也是建立在周期非均匀的基础之上。在该文献中, Xu 讨论了两个随机采样模型:简单随机采样和分层随机采样。基于这两个随机

采样模型, Xu 提出了相应的分数谱分析方法,并给出了分数谱重构公式。周期非均匀采样模型具有很高的应用价值,近年来取得了较为丰硕的研究成果。在今后的研究工作中,该模型仍然是采样问题的一个研究重点。

2) 时钟抖动造成的非均匀

近年来,硬件水平的不断提高使得高速 A/D 采样成为可能。然而在采样过程中发生的时钟抖动常常会造成 A/D 采样精度下降。因此,由时钟抖动造成的非均匀采样逐渐成为了采样领域的一个研究热点。在图 5 所示的模型示意图中,由于时钟抖动,实际采样点相对于理想均匀采样点发生小范围的偏差,从而造成非均匀采样<sup>[99]</sup>。基于该模型, Liu<sup>[100]</sup>于 2014 年在函数空间中建立了与分数傅里叶变换相关的统一框架,并基于该框架给出了相应的采样定理,与此同时,该采样定理不对信号的分数域带宽做任何限制。 Xu<sup>[99]</sup>于 2016 年通过分析非均匀采样信号的分数谱,发现非均匀采样对信号分数谱产生的影响可以等效为一个分数域前置滤波器。当采样过程中所引入的噪声满足一定条件时,噪声对分数谱造成的影响可以与非均匀采样对分数谱造成的影响相抵。在此基础上, Xu 基于 Maymon<sup>[101]</sup>在 2011 年提出的随机 sinc 内插法给出了信号的近似重构公式。时钟抖动造成的非均匀采样以高速 A/D 采样为背景,具有非常重要的应用价值。然而到目前为止,与分数傅里叶变换相关的研究成果依然比较少,值得做进一步探索。

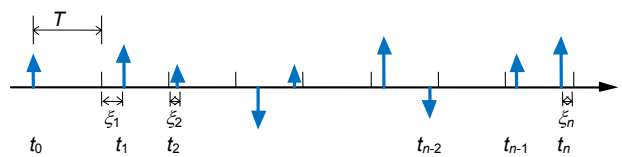


图 5 时钟抖动造成的非均匀采样模型<sup>[99]</sup>  
Fig. 5 The model of nonuniform sampling due to clock jitter<sup>[99]</sup>

3) 有限个点偏移造成的非均匀

有限个点偏移造成的非均匀是指在均匀采样的基础上,有限个采样点的位置发生偏差,其模型示意图如图 6<sup>[97]</sup>。 Tao<sup>[97]</sup>于 2008 年对经典的重构公式进行了改进,提出了基于线性正则变换的信号重构公式。2009 年, Zhao<sup>[102]</sup>在再生核希尔伯特空间中研究了该采样模型,并指出任意分数域带限信号都可以表示为再生核的线性组合。基于最小化均方误差准则和特征值分解的方法, Zhao<sup>[102]</sup>给出了相应的重构公式。但由于该模型在工程实际中应用不多,因此后续研究成果较少。



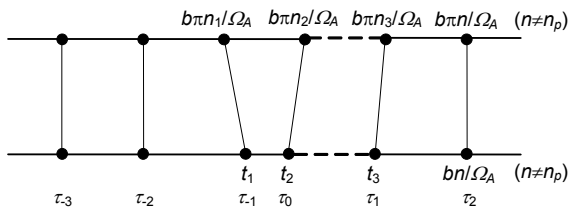


图 6 有限个点偏移造成的非均匀采样模型<sup>[97]</sup>

Fig. 6 The model of nonuniform sampling due to migration of finite samples<sup>[97]</sup>

4) 一般非均匀

对于一般情况下的非均匀采样序列, 若想完全重构原信号, 需要对非均匀采样点的位置加以限制:

$$D = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |t_k - k| < \frac{1}{4}, \quad (23)$$

其中  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  是采样点的位置。

Tao<sup>[97]</sup>于 2008 年给出了基于分数傅里叶变换的信号重构公式。之后, Ran 和 Zhao<sup>[103-104]</sup>在再生核希尔伯特空间中研究了与该模型相关的采样定理, 证明了任意信号都可以表示为再生核的线性组合。实际上, 该模型在特定条件下可退化为其他非均匀采样模型。比如, Xu<sup>[99]</sup>在 2016 年利用该模型的重构公式来重构由时钟抖动造成的非均匀采样信号, 这是由于抖动量通常远小于采样间隔, 因此满足限制条件(23)。另外, 当有限个采样点的偏移量满足限制条件(23)时, 该模型将会退化为有限个点偏移造成的非均匀采样模型。但由于该模型下的重构核函数与每个非均匀采样时刻都有关系, 计算量大, 因此其重构公式并不实用, 后续的研究成果也比较少。

5.3 多通道采样

多通道并行采样可极大降低采样率, 是近年来的

一个研究重点。Zhang<sup>[105]</sup>于 2008 年提出了适用于分数域带限信号的多通道采样定理。该采样模型如图 7 所示<sup>[105]</sup>。Wei<sup>[106]</sup>于 2010 年进一步推广了 Papoulis 的采样定理, 证明了在一个分数域线性时不变系统中,  $M$  通道采样可使采样率降低为原来的  $1/M$ , 并以原信号和原信号的导数作为两个通道的输出, 验证了双通道的情况。为了提升与分数傅里叶变换相关的多通道采样的性能, Shi<sup>[107]</sup>于 2010 年利用时域卷积操作处理多通道采样中的频谱泄露问题。针对分数域带限信号, Wei<sup>[108-109]</sup>于 2011 年提出了相应的卷积运算实现多通道采样和重构。

对于分数域带通信号, Wei<sup>[110]</sup>于 2014 年提出了与线性正则变换相关的多通道采样定理。然而该采样定理要求通道数必须为偶数, 才能实现带通信号的完全重构。为了突破这一限制, Wei<sup>[111]</sup>于 2016 年提出了新的多通道采样定理, 并证明当截止频率是信号分数域带宽的整数倍时, 任意通道数都可以实现带通信号的完全重构。

在以往的多通道采样模型中, 各个通道的采样率都是相同的。针对每个通道采样率不同的问题, Wei<sup>[112]</sup>于 2016 年提出了多通道多采样率采样定理。

上述多通道采样定理都是理想情况下的采样, 而在实际采样过程中, 信号无法实现严格带限, 同时也很难保证每个采样点的位置都是精准的<sup>[113]</sup>。为此, Shi<sup>[113]</sup>于 2016 年建立了一个适用于实际情况的、通用的采样模型, 并基于这一模型提出了与线性正则变换相关的一致性采样定理。然而, 这一模型只适用于单个通道。基于 Shi<sup>[113]</sup>的工作, Xu<sup>[114]</sup>于 2017 年提出了多通道一致性采样定理, 该采样定理适用于任意能量带限信号和任意采样手段。

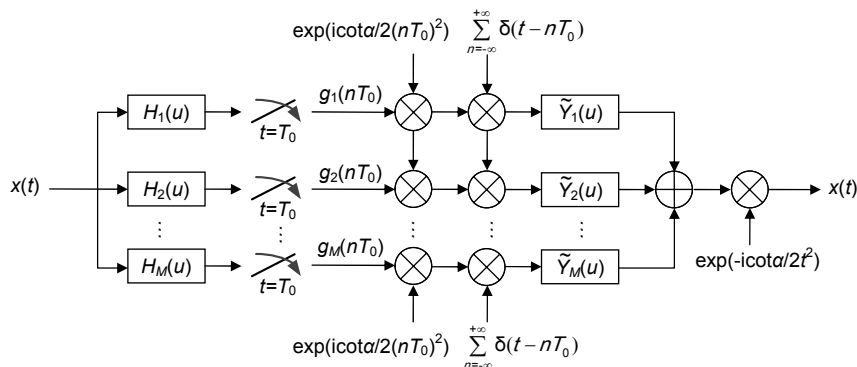


图 7 多通道采样模型<sup>[105]</sup>

Fig. 7 The model of multichannel sampling<sup>[105]</sup>

#### 5.4 随机信号的采样

上述采样理论针对的是确定性信号,然而自然界中的许多信号都具有随机性。分数傅里叶变换相关的随机信号的采样理论建立在分数相关函数和分数功率谱<sup>[115]</sup>的基础上。Zhang<sup>[116]</sup>于2010年率先研究了分数傅里叶变换相关的随机信号的采样理论。对于均匀采样,Zhang<sup>[116]</sup>指出,通过对分数域带限随机信号的分数相关函数进行采样,并利用 Xia<sup>[77]</sup>的重构公式对原信号进行重构,重构信号能够在均方意义上收敛至原信号。与此同时,Zhang<sup>[116]</sup>研究了分数域带限随机信号的导数采样,利用信号的采样值和信号导数的采样值,将采样率降至 Nyquist 率的一半。对于周期非均匀采样,Zhang<sup>[116]</sup>基于 Tao<sup>[96]</sup>提出的周期非均匀采样定理给出了分数域带限随机信号的重构公式。对于多通道采样,Zhang<sup>[116]</sup>基于其在2008年提出的多通道采样定理<sup>[105]</sup>给出了分数域带限随机信号的重构公式。有关随机信号采样近年来的研究成果包括:Torres<sup>[117]</sup>于2014年给出了分数域带限随机信号的采样定理与冯·诺依曼遍历定理之间的关系;Huo<sup>[118]</sup>于2015年研究了线性正则域带限随机信号的均匀采样定理和多通道采样定理,并分析了采样过程中存在的混叠误差和截断误差。对于时钟抖动造成的非均匀采样,Xu<sup>[99]</sup>在2016年基于随机 sinc 内插法给出了分数域带限随机信号的近似重构公式。通过上述介绍和分析可知,对随机信号采样理论的研究仍处于起步阶段,研究成果较少,且现有研究成果多基于确定性信号的采样理论。因此,与分数傅里叶变换相关的随机信号的采样理论仍有一定发展空间。

## 6 滤波与参数估计

信号的滤波与参数估计是信号处理的核心与基础,是提升信息系统性能的有效手段。在高速/高加速目标的雷达探测与识别、高分辨率合成孔径雷达成像、高动态测控通信的信号捕获与跟踪等问题中,信号的非平稳特性往往需要频率变化率来表征,传统的滤波与参数估计方法遇到了困难。基于分数傅里叶变换的方法为非平稳信号的滤波与参数估计提供了新途径。

卷积是滤波器设计中的重要概念。线性时不变滤波可以用经典卷积定理来描述,但对线性时变滤波,传统的卷积定理不再适用。对于某些线性时变系统,其分数系统函数的形式不随时间发生变化,这种线性时变滤波可以用分数卷积来描述。1997年,Almeida<sup>[119]</sup>将两个信号的分数傅里叶变换的乘积的逆分数傅里叶

变换定义为分数卷积。这种分数卷积是对傅里叶卷积的自然推广,符合分数域相乘对应时域卷积的性质。然而该定义缺乏对偶性,即时域的相乘无法对应分数域的卷积,因此这种定义并不实用。1998年,Zayed<sup>[120]</sup>先对信号进行 Chirp 调制,再对调制信号做经典卷积,最后对经典卷积的结果进行解调,从而得到分数卷积。这种分数卷积基本符合时域卷积对应分数域相乘的性质,具有时域和分数域的对偶性,并且在  $\alpha=\pi/2$  时能退化为经典卷积,因此被广泛使用<sup>[83-86]</sup>。Deng<sup>[81]</sup>于2006年提出了线性正则变域的卷积定理,此卷积的构造思路与 Zayed<sup>[120]</sup>类似。在此基础上,Deng 发现了频域扫描滤波器是典型的分数域带通滤波器,部分解决了时频耦合信号的滤波难题。更多有关分数卷积的讨论可参考文献<sup>[122-127]</sup>。

分数相关和分数功率谱是一个分数傅里叶变换对,这两个概念在分数域随机信号的滤波和分析中非常有用。1995年,Mendlovic<sup>[128]</sup>通过对两个信号分别做分数傅里叶变换,再对变换结果做复共轭乘积,最后对乘积做逆分数傅里叶变换,得到了分数相关的表达式。1996年,Bitran<sup>[129]</sup>基于 Mendlovic 的定义分析了分数相关的性能,发现噪声的类别是影响分数相关性能的主要因素。1997年,Granieri<sup>[130]</sup>提出了最优分数相关的概念,在 Mendlovic 定义的分数相关的基础上,通过寻找分数傅里叶变换的最优阶次来得到最优分数相关函数。2001年,Akay<sup>[121]</sup>从算子的角度给出了分数相关的定义,并证明了该分数自相关函数对应模糊函数的径向切片。针对某些在频域难以用二阶统计量描述的非平稳随机信号,Tao<sup>[115]</sup>于2008年给出了分数相关和分数功率谱的定义,得到了分数功率谱和分数相关函数的关系,发现了某些线性时变滤波在分数域可以转化为线性时不变滤波。该成果奠定了分数域随机信号滤波和分析的基础,为雷达和通信系统中非平稳信号的建模、辨识与谱估计提供了新方法。

短时傅里叶变换也是一种常用的时频分析工具,其时频分辨单元能够反映信号的频率信息。针对包含频率变化率的信号,短时傅里叶变换难以准确描述其特征。为此,Capus<sup>[131]</sup>和 Catherall<sup>[132]</sup>提出了一种短时分数傅里叶方法,其核心思想是将传统短时傅里叶变换中的窗函数替换为 Dechirp 窗函数。Zhang<sup>[133]</sup>于2000年通过将信号在时频平面上进行旋转、再施加短时傅里叶变换,得到了自适应短时分数傅里叶变换。然而上述短时分数傅里叶变换仍然是在时频平面上分析信

号,而不是在时域-分数域平面上分析信号。Tao<sup>[134]</sup>于2010年提出了短时分数傅里叶变换的定义,证明了时域-分数域分辨单元是不同于传统矩形时频分辨单元的平行四边形分辨单元,且单个分辨单元不仅能反映频率信息,还能提供频率变化率的信息。同时,该工作发现了时域-分数域最优窗函数是高斯函数乘以二次相位函数,且在此最优窗函数下具有最高的时域-分数域分辨率和最紧的支撑区。该成果为提取信号的频率变化特征参数提供了有力工具,奠定了时域-分数域联合滤波和分析的基础。

在实际应用中,当信号的调频率未知时,利用分数傅里叶变换分析和处理信号需要对变换阶次进行搜索,运算量大。相比于离散傅里叶变换的数值计算方法——快速傅里叶变换,离散分数傅里叶变换的数值计算方法普遍具有较高的计算复杂度。考虑到实际应用中许多有用信号的分数谱都具有稀疏性,Liu<sup>[135]</sup>于2014年将文献<sup>[136-137]</sup>中稀疏傅里叶变换的思路与Pei采样型数值计算方法的计算架构相结合,提出了稀疏离散分数傅里叶变换,大幅度降低了计算复杂度。与此同时,稀疏离散分数傅里叶变换在分数域稀疏Chirp信号的参数估计和存在通讯信号干扰时的射电天文信号检测中得到了初步应用,并取得了良好的效果<sup>[135,138]</sup>。

正如传统的频域滤波器具有乘性滤波机理,分数域滤波器也具有乘性滤波机理:

$$x_{out} = F^{-\alpha}[F^{\alpha}[h] \cdot F^{\alpha}[x_{in}]] \quad (24)$$

其中 $F^{\alpha}[h]$ 是 $\alpha$ 角度下的分数傅里叶变换函数。通过设计不同的 $F^{\alpha}[h]$ ,可以得到不同类型的分数域滤波器。当观测信号在时域和频域重叠,但在某个特定阶次的分数域没有重叠时,可以利用分数域滤波实现信号的复原。该思想可借助Kutay在文献<sup>[139]</sup>中的例子说明。如图8所示,原信号和噪声的WVD分布在时间轴和频率轴上重叠,但在0.5阶次的分数域不重叠,因此可利用0.5阶次的分数域滤波器滤除噪声,还原原始信号<sup>[139]</sup>。基于该思想,Sharma<sup>[140]</sup>利用分数傅里叶变换的尺度变换性质和时移性质提出了一种增大原信号和噪声在时频平面上分离程度的方法,使得分数域滤波更容易实现。这里,观测信号的WVD的作用是确定分数傅里叶变换的阶次和截止频率。然而WVD存在交叉项,不适合处理包含多个时频分量的信号<sup>[19]</sup>。对于这类信号,可以利用Garbor变换不存在交叉项的性质,结合分数域滤波器滤除噪声<sup>[19]</sup>。

上述信号复原问题可用以下模型描述:

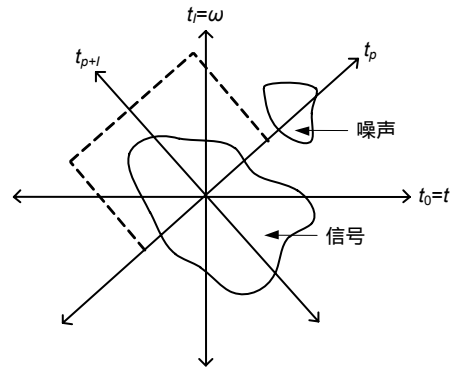


图8 分数域滤波<sup>[139]</sup>

Fig. 8 Filtering in fractional domain<sup>[139]</sup>

$$y(t) = H[x(t)] + n(t) \quad (25)$$

其中: $y(t)$ 代表观测信号, $x(t)$ 代表原信号, $H$ 代表信号通过的系统, $n(t)$ 代表噪声。当 $H$ 是一个线性时不变系统,且原信号和噪声是平稳随机过程时,模型(25)的最优解对应Wiener滤波。然而当 $H$ 是一个线性时变系统,或原信号/噪声是非平稳随机过程时,需要用到分数域最优滤波理论<sup>[139,141]</sup>。分数域最优滤波器可以通过最小化均方误差,最大化信噪比,或最小化方差等方法得到<sup>[11]</sup>。Kutay<sup>[139]</sup>提出的最小化均方误差法的目标函数为

$$\sigma_e^2 = E \left[ \|F^{\alpha}(x) - F^{\alpha}(x_r)\|^2 \right] \quad (26)$$

其中: $E[\cdot]$ 代表期望, $\|\cdot\|^2$ 代表 $L_2$ 范数, $x_r$ 代表复原信号,可以表示为

$$x_r = F^{-\alpha}[g \cdot F^{\alpha}[y]] \quad (27)$$

其中 $g$ 代表分数域滤波器,是下述优化问题的最优解

$$g_{opt} = \arg \min_g \sigma_e^2 \quad (28)$$

Kutay<sup>[142]</sup>将分数域最优滤波理论应用到二维图像复原中。上述有关分数域最优滤波的研究成果在Kuaty<sup>[143]</sup>于1999年出版的专著中均有介绍,除此之外,该著作还涉及了多分数域滤波、分数域多阶滤波、分数域多通道滤波、短时分数傅里叶滤波等理论,以及这些滤波方法在一维信号复原和图像复原中的应用。相比于傅里叶域的经典方法,分数域最优滤波方法无需附加条件就能达到更好的滤波效果。然而上述分数域最优滤波只能实现单一变换阶次下的信号处理。为此,Erden<sup>[144]</sup>于1999年将分数域最优滤波推广为分数域重复滤波,通过对分数域滤波器进行级联,并对每个级联滤波器的变换阶次进行优化选择,实现更好的

信号复原效果。Qi<sup>[145]</sup>于 2004 年研究了被白噪声污染的 Chirp 信号的分数域滤波问题, 并利用最小化均方误差的方法, 证明了分数域最优滤波器是维纳滤波器。

Chirp 信号广泛应用于雷达和通信等领域, 与之相关的信号检测与参数估计是雷达、通信信号处理中的关键问题。分数傅里叶变换可看作是信号在 Chirp 基上的分解, 因此非常适合用来解决此类问题。Qi<sup>[42]</sup>于 2004 年提出了一种基于分数傅里叶变换的多分量 Chirp 信号的检测与参数估计方法。由于 Chirp 信号在特定的分数域具有能量聚集性, 因此可将 Chirp 信号的检测与参数估计问题转化为分数域上的优化搜索问题<sup>[42]</sup>。Qi 所提出的基于拟牛顿法的两级搜索算法具有计算复杂度低、估计精度高的优点。除此之外, Qi 所提出的多成分 Chirp 信号的检测与估计方法能在分数域实现信号分离, 有效抑制了信号检测过程中强信号分量对弱信号分量的影响。但在实际应用中, 当多目标返回的 Chirp 信号参数很相似时, 由于分辨率的影响, 上述方法很难将目标区分开。Liu<sup>[146]</sup>于 2012 年通过选择合适的离散分数傅里叶变换的维度归一化参数, 实现了多成分 Chirp 信号的区分。信号的时延估计是信号处理领域的另一个重要问题。Tao<sup>[147]</sup>于 2009 年提出了一种基于分数傅里叶变换的 Chirp 信号的时延估计方法。该方法利用的是分数傅里叶变换的时延性质, 计算复杂度低, 方差逼近 Cramer-Rao 界。2013 年, Hao<sup>[148]</sup>提出了基于集成经验模态分解(ensemble empirical mode decomposition, EEMD)-分数傅里叶变换的多分量 Chirp 信号的检测与参数估计方法。通过利用 EEMD 算子, 从频域分解出信号的窄带分量, 然后利用分数傅里叶变换准确估计每个分量的参数。该方法解决了信号分解的模式混叠问题, 将多分量 Chirp 信号的检测问题简化为一维搜索问题, 在减少计算量的同时提高了检测精度。如何在低信噪比情况下快速估计 Chirp 信号参数也是该领域面临的一个难题。2014 年, Liu<sup>[135, 138]</sup>将分段离散多项式相位变换与分数傅里叶变换相结合, 首先利用分段多项式相位变换对微弱信号在快时间进行积累, 再利用快速傅里叶变换在慢时间对信号的调频率进行粗估, 最后利用稀疏分数傅里叶变换在调频率的粗估值附近进行峰值搜索, 从而实现了多分量 Chirp 信号参数的快速估计。

## 7 多域分析

利用多个阶次的分数傅里叶变换可以对信号在多个分数域进行分析(如图 9 所示)。多域分析的主要研

究内容包括分数域不确定性原理、多分数域信息复用以及多分数域特征利用等。

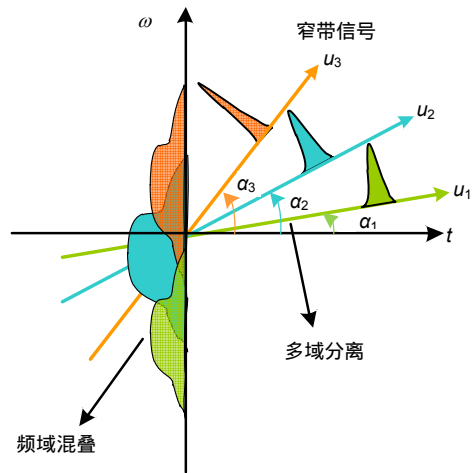


图 9 多分数域分析

Fig. 9 Multi-domains analysis

1991 年, Mustard<sup>[149]</sup>指出信号在两个分数域的带宽乘积不同于经典的时域和频域的带宽乘积。1995 年, Ozaktas 和 Aytur<sup>[150-151]</sup>得到了复信号在两个分数域的带宽乘积下界:

$$\Delta u_{\alpha}^2 \Delta u_{\beta}^2 \geq \frac{1}{4} \sin^2(\alpha - \beta) \quad (29)$$

Akay<sup>[152]</sup>于 1997 年从分数算子的角度得到了同样的分数域带宽乘积下界。Shinde<sup>[153]</sup>于 2001 年得到了实信号在两个不同分数域的分数域带宽乘积下界, 并证明了高斯信号可以达到该下界:

$$\Delta u_{\alpha}^2 \Delta u_{\beta}^2 \geq \left( \Delta t^2 \cos \alpha \cos \beta + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{4 \Delta t^2} \right) + \frac{1}{4} \sin^2(\alpha - \beta) \quad (30)$$

Capus<sup>[154]</sup>于 2003 年深入研究了高斯信号在两个不同分数域的带宽乘积下界。Xu<sup>[155]</sup>于 2009 年给出了两种分数域熵不确定性原理, 并指出了乘积下界与分数傅里叶变换的参数以及采样间隔之间存在的关系。Zhao<sup>[156]</sup>于 2009 年提出了实信号和复信号在两个不同分数域的带宽乘积下界的一般表征, 得到了信号在两个不同分数域的最小分辨单元和最优分析窗函数, 揭示了多分数域分解的分辨率机理, 对不同场合设计具有最优分辨力的信号具有重要指导意义。Shi<sup>[157]</sup>于 2012 年指出, 正如任意非零信号在时域和频域不可同时具有无限大带宽, 任意非零信号在两个不同的分数域也不可同时具有无限大带宽。近期有关分数域不确定性原理的文献多致力于得到更为紧致分数域带宽乘积下界<sup>[158]</sup>。

类似时分复用系统和频分复用系统, 分数傅里叶域频分复用系统能够利用某一特定分数域中不同的频率分量来区分不同的用户和信息, 从而取得比傅里叶域更高的分数域带宽乘积利用率<sup>[159-160]</sup>。在此基础上, Martone<sup>[161]</sup>于 2003 年提出了基于分数傅里叶变换的正交频分复用系统 (orthogonal frequency division multiplexing, OFDM) 的概念。然而基于这种定义的分数域频分复用系统实际上是传统的频分复用系统在时频平面上某一特定角度的旋转, 并未充分利用分数傅里叶变换的变换阶次<sup>[160]</sup>。为此, Meng<sup>[162]</sup>于 2011 年提出了多个分数傅里叶域同时传输信息的分数傅里叶变换阶次复用系统。该系统充分利用了分数傅里叶变换的变换阶次, 以不同的分数傅里叶变换阶次区分不同的用户和信息。然而不同阶次的分数傅里叶变换核函数之间是非正交的, 导致该系统无法利用传统方法实现传输信息的解调。为此, Tao<sup>[162]</sup>给出了分数域多路传输复用器的准确重建条件, 并通过建立矢量线性方程组解决了该问题。

分数阶傅里叶变换在信息安全领域具有广泛应用。基于分数阶傅里叶变换的信息安全系统将变换阶次作为密钥, 实现了比传统系统更高的安全性能。例如, 在图像加密领域, Tao<sup>[163]</sup>在 2008 年提出了一种基于分数傅里叶变换的双图加密方法, 该方法将传统双随机相位加密方法中的傅里叶变换替换为两个不同阶次的分数傅里叶变换, 取得了比传统方法更好的加密效果。然而利用该方法, 信息只能被加密到某一特定阶次的分数域中。为充分利用变换阶次, Tao<sup>[164]</sup>于 2010 年提出了一种基于多阶次分数阶傅里叶变换的图像加密方法, 该方法将原始图像分解为若干子图像, 利用不同阶次的分数傅里叶变换分别对每个子图像进行加密<sup>[160]</sup>, 实现了更好的加密性能。

## 8 应用

分数傅里叶变换作为信号处理的有力工具, 在工程实践中得到了广泛应用, 包括雷达、通信、图像、光学干涉测量、医疗、生物和机械仪器领域也体现出了很高的应用价值。

### 8.1 分数域雷达信号处理

#### 1) 基于分数傅里叶变换的动目标检测(MTD)

雷达动目标检测通过对目标发射探测信号, 并接收其回波信号, 获得目标至发射点的距离、目标的速

度、方位、高度等信息。传统的动目标检测(moving target detection, MTD)方法被广泛用于探测匀速运动目标, 其原理是利用动目标回波信号与杂波回波信号的多普勒频率不相等的特点, 通过多普勒频率的不同将杂波和运动目标区分开来。但对于加速运动或者高阶运动目标, 由于存在距离徙动和多普勒徙动, 传统 MTD 方法失效。考虑到分数傅里叶变换的核函数是线性调频信号, 因此可以利用分数傅里叶变换对距离徙动和多普勒同时进行补偿, 进而极大提高目标探测概率。2002 年, Sun<sup>[165]</sup>将 CLEAN 技术与分数域滤波技术相结合, 实现了强目标与弱目标的迭代检测, 取得了比传统时频分析方法更好的检测效果。Qi<sup>[42]</sup>于 2004 年提出的多成分线性调频信号的检测与估计方法能在分数域实现信号分离, 从而应用于多目标探测。但在实际目标探测过程中, 当多目标返回的线性调频信号的参数很相似时, 由于分辨率的影响, 上述两种方法都很难将目标区分开。为解决这个问题, Liu<sup>[146]</sup>分析了多成分线性调频信号在分数域的频谱分布特性, 发现通过选择合适的离散分数傅里叶变换的维度归一化参数, 可以将多成分的线性调频信号区分开。与此同时, 他还给出了具体的参数选择方法。Tao<sup>[166]</sup>在 2011 年定量分析了距离徙动和多普勒徙动的影响, 并提出了一种尺度化处理和分数傅里叶变换相结合的方法。该方法可以对线性调频脉冲压缩雷达目标探测中的距离徙动和多普勒徙动进行补偿。除此之外, 分数傅里叶变换也被用于低信噪比环境下高速高加速运动目标的多普勒徙动补偿<sup>[167]</sup>。另外, Guan<sup>[168]</sup>在 2012 年将分级迭代的搜索方法和统计方法结合, 设计了一种自适应的线性处理器, 用于海面目标探测, 提高了探测的速度和能力。然而, 上述方法只适用于加速运动目标探测, 不适用于高阶运动目标和微多普勒目标探测, 因此在分数傅里叶变换的基础上出现了一些衍生方法。Chen<sup>[169]</sup>研究的分数阶模糊函数可以用来探测高阶运动目标。2014 年, Chen<sup>[170]</sup>在对微多普勒运动目标进行数学建模和去除海尖峰的过程中, 将短时分数傅里叶变换用于探测微多普勒运动目标, 并证明了这种方法的有效性。但是上述方法不适用于低信噪比/信杂比环境下的目标探测。为提高低信噪比/信杂比环境下的目标探测概率, Chen 同年<sup>[171]</sup>提出了 Radon-分数傅里叶变换方法, 这是一种长时间相参积累方法, 通过增加积累时间来提高积累增益。在 Radon-分数傅里叶变换的基础上, Tian<sup>[172]</sup>在 2017 年提出了 Radon 非均

匀分数傅里叶变换,并将其应用到随机重频脉冲雷达中。另外,考虑到机动目标的运动模型,Chen<sup>[171]</sup>提出了更加匹配目标运动模型的 Radon-分数阶模糊函数,提高了对低可观测性机动目标的探测概率。

## 2) 基于分数傅里叶变换的合成孔径雷达(SAR)成像

合成孔径雷达(Synthetic aperture radar, SAR)是一种高分辨率成像雷达,是国防、民用以及科学研究等领域的研究热点。动目标 SAR 成像常常伴随成像模糊和距离徙动等问题。Sun<sup>[165]</sup>在 2002 年指出,对于机载 SAR,来自地面的动目标回波信号可以看作 Chirp 信号,因此可以将分数傅里叶变换用于机载 SAR 地面动目标检测。基于分数傅里叶变换的 SAR 成像技术通常将传统 SAR 成像算法与分数傅里叶变换相结合,从而得到分辨率更高的图像。例如,Amein<sup>[173]</sup>在 2005 年提出了一种基于分数傅里叶变换的 Chirp 缩放算法(chirp scaling algorithm, CSA)。2009 年,Yi<sup>[174]</sup>将 Keystone 变换与分数傅里叶变换相结合,来确定多个动目标的初始位置、方位角速度、径向速度以及径向加速度。2011 年,Wang<sup>[175]</sup>将简化分数傅里叶变换应用于三天线 SAR 地面动目标指示,该方法基于三天线方法来消除杂波,并利用简化分数傅里叶变换估计多普勒参数,从而实现动目标的探测和成像。在 SAR 成像过程中,地面目标的微小振动会引起 SAR 回波信号的相位调制,导致成像物体周围形成“鬼目标”。2012 年,Wang<sup>[176]</sup>提出了一种基于离散分数傅里叶变换的振动估计方法,通过将回波信号的标准预处理与离散分数傅里叶变换相结合,实现了对振动目标的时变加速度、频率和位移的准确估计。同年,Bu<sup>[177]</sup>将分数傅里叶变换引入基于压缩感知的 SAR 成像技术中,相比于传统脉冲压缩技术,该方法可以得到更聚焦的 SAR 图像。2013 年,Sun<sup>[178]</sup>利用分数傅里叶变换得到了一个参数化聚焦算法,该算法统一了各种 SAR 成像算法,包括 SAR、ISAR、聚束 SAR、滑动聚束 SAR 成像算法等。基于该算法,各种模式的数据都可以通过选择合适的参数以及旋转角来进行处理。同年,Singh<sup>[179]</sup>利用分数傅里叶变换在时频平面上表征 SAR 信号,与传统多尺度方法相比,该方法更适合用来对具有后向散射特性的目标进行图像分类。大距离徙动和强空间变异特征使得大斜视 SAR 数据在高分辨成像过程中遇到困难。为解决大斜视弹载 SAR 的高分辨成像问题,Chen<sup>[180]</sup>于 2015 年提出了一种新的基于分数傅里

叶变换的 CSA,相比于传统 CSA,该方法可以得到更聚焦的 SAR 图像。2016 年,Pelich<sup>[181]</sup>将分数傅里叶变换应用于星载 SAR 的数据处理,利用分数傅里叶变换在旋转时频平面上表征 SAR 信号,使信号能量实现最优聚焦。

## 8.2 分数域通信信号处理

传统 OFDM 通信系统利用单频信号作为子载波,其调制与解调基于快速傅里叶变换,是实现复杂度最低、应用最广的一种多载波传输方案。然而多普勒频偏会导致 OFDM 系统出现严重的子载波间干扰。基于分数傅里叶变换的多载波通信系统以 Chirp 信号为子载波,能够通过自适应调整调频率来降低子载波间的干扰<sup>[182]</sup>。Martone<sup>[161]</sup>于 2003 年提出了基于分数傅里叶变换的 OFDM 通信系统(FRFT-OFDM)的概念。该系统将 Chirp 信号作为一组正交基,并将传统 OFDM 系统中的快速傅里叶变换替换为分数傅里叶变换,完成子载波的调制与解调,并通过选择最优变换阶次,实现了比传统系统更好的性能<sup>[182]</sup>。2005 年,Chen<sup>[183]</sup>针对 FRFT-OFDM 提出了一种时变信道参数估计方法,获得了较高的估计精度。随后,Chen<sup>[184]</sup>针对 FRFT-OFDM 系统,基于最小均方误差准则设计出了一种在接收端进行均衡的分数域滤波器,相比于传统方法实现了更好的均衡效果。Yang<sup>[185]</sup>于 2008 年提出了基于分数傅里叶变换的多输入多输出(multiple-input multiple-output, MIMO)-OFDM 系统,并分析了分数傅里叶变换最优阶次的选择问题,证明了相比于传统 MIMO-OFDM 系统,该系统能够在快速时变信道下实现更好的性能。2010 年,Zheng<sup>[186]</sup>分析了 FRFT-OFDM 在时频双选择信道中的性能,并推导了不同信道下子载波间干扰引起的信干比表达式。同年,Wang<sup>[187]</sup>利用 Chirp 基抑制载频干扰,通过将分数傅里叶变换与最佳干扰抑制相结合来抑制小区间干扰。之后,Wang<sup>[188]</sup>在 2013 年提出了一种单输入单输出 FRFT-OFDM 系统,实现了多基站的同频率通信。Kumari<sup>[189]</sup>于 2013 年推导了 FRFT-OFDM 系统在频率选择性信道中载波频偏信号的误码率表达式。Mokhtari<sup>[190]</sup>于 2016 年推导了 FRFT-OFDM 系统的 ICI(inter channel interference)功率上界,并利用该上界得到了近似最优的分数傅里叶变换阶次。

利用分数傅里叶变换阶次多样性,可实现物理层安全通信。Cheng 和 Deng<sup>[191-192]</sup>于 2014 年基于

FRFT-OFDM 设计了一种被动光网络系统,通过引入混沌序列,提高了物理层通信的安全性和传输性能。2014年,Wen<sup>[193]</sup>提出了跨层离散分数傅里叶变换安全通信模型,利用FRFT-OFDM来调制编码数据,结合分数傅里叶变换阶次多样性,大大降低了误码率。然而每个发送数据仅与单个变换阶次有关,窃听者可以通过穷举搜索的方式恢复信息。此外,在利用变换阶次实现物理层安全时,需要利用上层加密体制来进行变换阶次的安全共享与更新,没有充分利用衰落信道的随机性<sup>[182]</sup>。针对这些问题,Tao<sup>[162]</sup>于2011年提出了变换阶次复用(TODM)方法,该方法将原始信息在多个变换阶次下进行加密,任意一个变换阶次的偏差都会导致数据解密失败。然而具有不同调频率的Chirp信号之间是非正交的,因此该方法在无线衰落信号中的安全性能较差。2017年,基于Tao<sup>[162]</sup>的工作,Wang<sup>[194-195]</sup>提出了一种安全编码多阶次FRFT-OFDM子系统,该系统可以将子载波同时调制到多个分数域,在解调过程中,任意解调阶次出错都会导致误码率上升,大大提高了安全性。

### 8.3 分数域图像加密

图像加密作为一种保护图像内容的有效手段,既可以在空域实现,也可在变换域实现。由于分数傅里叶变换在图像加密中体现出了诸多优势,因此基于分数傅里叶变换的图像加密技术得到了广泛研究<sup>[196-198]</sup>。Unnikrishnan和Singh<sup>[199]</sup>于2000年提出了基于分数傅里叶变换的双随机相位编码方法,该方法相比于传统双随机相位编码方法具有更高的安全性。2001年,Liu<sup>[200]</sup>利用级联的多阶分数傅里叶变换构造出一种图像加密方法,该方法在加密的每个阶段都使用一个随机相位掩膜,在不额外增加硬件复杂度的同时能大大提高安全性能。Hennelly<sup>[201]</sup>于2003年提出的图像加密方法将图像在分数域的各个部分做随机移位,具有分数傅里叶变换和像素置乱的双重优点,并且可以利用光学设备来实现。在加密性能上,无需相位掩膜就能实现对盲解密的鲁棒性。Liu<sup>[202]</sup>于2007年提出的图像加密方法基于不同阶次的迭代分数傅里叶变换,可以将两幅图像加密成为一幅图像,同时具备高效性和安全性。基于文献[201]和文献[202]的研究成果,Tao<sup>[163]</sup>提出了一种基于分数傅里叶变换的双图加密方法,该方法对变换的阶次具有敏感性,对数据丢失和噪声干扰具有鲁棒性。传统图像加密方法大多是基于灰度图像的,Joshi<sup>[203]</sup>于2009年提出的基于分数傅里叶变换

的非线性加密方法可以用来加密彩色图像。随后,他又提出了一种基于分数傅里叶变换的双随机相位编码方法,该方法可以利用字节级编码同时加密一幅彩色图像和一幅灰度图像。2010年,Tao<sup>[164]</sup>基于多阶分数傅里叶变换和混沌序列提出了一种新颖的图像加密方法,该方法利用混沌系统产生的迭代序列具有非周期、非收敛、对初始参数敏感的特点,实现了良好的加密性能。后来又有诸多学者将其与分数傅里叶变换结合起来,以增强加密系统的安全性<sup>[204]</sup>。2013年,Sui<sup>[205]</sup>基于两组混沌序列和迭代分数傅里叶变换提出了一种单通道图像加密方法,该方法可以将一幅彩色图像加密成为一幅灰度密文,具有收敛速度快、对密钥敏感、对盲解密和噪声鲁棒性强的优点。2016年,Kang<sup>[65]</sup>提出了一种基于多参数离散分数变换的图像加密方法,为拓展离散分数变换在图像加密领域的应用提供了新思路。

### 8.4 分数域光学干涉测量

干涉条纹是分析光学干涉测量中的一个重要环节。被测量的物理信息,如曲率半径、折射率、位移、面形等,包含在条纹图的相位及其导数中,因此干涉条纹分析的主要内容是提取条纹图的相位信息、进而获取被测量的物理信息<sup>[206]</sup>。其中,具有二次相位分布的干涉条纹被称作牛顿环。传统最小二乘拟合法在参数估计过程中需要对参数值进行初始估计,然后通过迭代的方法确定全部参数,时间复杂度高、对噪声和遮挡的鲁棒性差<sup>[207]</sup>。2007年,Nascov<sup>[208]</sup>将牛顿环的相位信息建模为二次多项式相位信号,其信号模型如式(31)所示,其中 $I_0$ 代表条纹图背景强度、 $I_1$ 代表幅度、曲率半径包含在 $(\alpha_{0x}, \alpha_{0y})$ 中、牛顿环的中心包含在 $(\omega_{0x}, \omega_{0y})$ 中、 $\varphi_0$ 代表初始相位:

$$I(x, y) = I_0 + I_1 \cdot \cos(\alpha_{0x}x^2 + \alpha_{0y}y^2 + \omega_{0x}x + \omega_{0y}y + \varphi_0), \quad (31)$$

该信号模型能够保证很高的参数估计精度,因此被广泛使用<sup>[209]</sup>。2009年,Gorthi<sup>[209]</sup>将整幅条纹图相位分段近似为二次多项式分布,再利用离散Chirp傅里叶变换求取多项式系数,从而完成整幅条纹图的相位提取。这里的Chirp傅里叶变换实际上就是简化分数傅里叶变换。2015年,Lu<sup>[206]</sup>提出了一种基于二维分数傅里叶变换的方法,该方法无需对参数值进行初始估计和迭代就能获得很高的精度,而且对噪声和遮挡具有良好的鲁棒性。然而在噪声条件下,利用分数傅里叶变换

方法测量出的牛顿环的中心值与实际值之间仍然存在微小的差别<sup>[210]</sup>。为此, Wu<sup>[210]</sup>于 2017 年将传统最小二乘拟合法与分数傅里叶变换方法相结合, 利用分数傅里叶变换的方法得到初始参数值, 然后利用最小二乘拟合法对初始参数值进行修正, 改善了测量中心存在微小偏差的问题, 进一步提升了测量精度。然而基于二维分数傅里叶变换的方法需要对变换阶次进行等步长搜索, 因此无法同时兼顾计算速度与估计精度<sup>[211]</sup>。Guo<sup>[211]</sup>于 2018 年提出了一种基于余弦分数傅里叶变换的方法, 利用余弦分数傅里叶变换的计算复杂度低于分数傅里叶变换的优点, 同时结合 ER-WCA 优化算法, 在提高计算效率的同时保证了参数估计的精度。

## 8.5 分数域医疗、生物、仪器信号处理

### 1) 分数域医疗健康

老人跌倒自动检测识别: 老人跌倒现已成为非常重要的公共健康问题, 近年来也得到了医疗、学术等各界的广泛关注。由于老人的生活环境通常比较复杂, 其跌倒信息往往淹没在噪声中, 如何在低信噪比条件下准确将老人跌倒活动从其他活动中识别出来是该领域的一个难题。在现存的实时检测技术中, 雷达技术具有不受光照限制、误报率低等优点, 其原理是老人跌倒时产生的雷达回波信号具有时变多普勒特征和微多普勒特征, 这意味着在足够短的时间内, 雷达回波信号可以用 Chirp 信号来近似, 因此可以利用分数傅里叶变换来处理。Liu<sup>[135, 138]</sup>于 2014 年提出的老人跌倒检测识别方法首先利用离散多项式相位变换对调频率进行粗估, 然后利用稀疏离散分数傅里叶变换对调频率进行细估, 最后利用短时分数傅里叶变换提取信号的分数谱特征, 从而对跌倒进行分类识别, 大大提高了低信噪比条件下的检测概率。

分数域核磁共振成像: 核磁共振技术是继 CT、B 超等影像检查手段后又一新的断层成像方法, 其临床应用是医学影像学中的一场革命。核磁共振成像基于均匀磁场的假设, 然而实际中磁场分布是非均匀的, 其强度具有二次相位特征, 这一点恰好符合分数傅里叶变换的特征函数。因此可利用分数傅里叶变换来分析和重构目标。实验表明, 利用该方法重构的图像比利用传统傅里叶变换重构的图像具有更高的质量<sup>[212]</sup>。

分数域心电信号检测: 随着医疗服务领域的快速发展, 生物医学信号研究得到了越来越多的重视。心电信号是一种典型的低频弱生物医学信号, 具有非平

稳性, 且在测量过程中与噪声有很强的时频耦合。基于分数傅里叶变换的自适应滤波方法能够在不增加计算复杂度的前提下, 有效提高心电信号的信噪比, 从而使恢复出的心电波形的特征点更为清晰<sup>[213]</sup>。

### 2) 分数域生物特征识别

分数域人脸识别: 人脸识别在人机交互、视频监控等方面有重要的应用, 但实际环境中光照和遮挡的影响会导致特征信息提取困难。分数域人脸识别方法将传统识别分类方法与分数傅里叶变换相结合, 利用二维分数傅里叶变换对人脸图像进行预处理和特征提取, 然后再利用分类器进行识别, 取得了较好的分类效果<sup>[214-215]</sup>。

分数域指纹识别: 指纹识别是生物特征识别的重要方式。传统指纹识别方法依赖于指纹细节, 对指纹采集质量要求很高。对于淡指纹或手指受伤人员的指纹, 利用传统方法很可能造成识别失败。基于分数傅里叶变换的光学系统依赖于指纹的整体特征, 通过对目标指纹与参考指纹进行分数相关来检测两个指纹的相似程度, 对破损指纹具有很高的识别度<sup>[216]</sup>。

分数域耳语音识别: 耳语是日常生活中常用的一种交流方式。耳语音识别在公共场合下的通讯、安全场所的身份鉴定、罪犯识别、电话网络查询与电话银行等领域都有一定的实用价值。其难点在于耳语音信号的能量低、采集困难, 且语音源类似于随机噪声, 因此信号的参数难以提取。基于分数傅里叶变换的耳语音识别方法充分利用了变换阶次, 针对不同的说话人和语音样本进行参数的自适应调整, 达到最优的识别效果<sup>[217]</sup>。

### 3) 分数域故障检测

分数域电机故障检测: 电机故障早期检测能有效减少损失。检测过程中面临的主要问题包括: 故障信号中包括大量时变成分、与工频信号不易分离、检测过程中存在测量误差和噪声干扰等。这些问题都会导致故障信号特征提取不精确, 诊断结果不可靠。短时分数傅里叶变换的优势在于能够反映非平稳信号的局部信息, 有利于故障信号的特征提取, 进而提高了检测概率<sup>[218]</sup>。

分数域机械故障检测: 机械故障检测能够保障机械设备的可靠运行。其检测难点在于要在强干扰环境下对非平稳故障信号进行特征提取。传统基于时频分析的盲源分离方法往往针对平稳信号, 效果不够理想。基于分数傅里叶变换的盲源分离方法更适合处理非平



稳信号,该方法已经在机械故障诊断过程中得到了应用,效果良好<sup>[219]</sup>。

## 9 结论与展望

### 9.1 结论

分数傅里叶变换作为傅里叶变换的一种广义形式,近年来不仅在理论研究上取得了丰硕的成果,在工程实践中的应用也得以推进。本文对分数傅里叶变换的理论研究成果及其应用进行了归纳总结:

1) 高效的数值计算方法是分数傅里叶变换在工程实践中得以应用的重要前提,文中介绍了两种应用广泛的离散化算法,包括采样型离散化算法和特征分解型离散化算法;

2) 介绍了由特征分解型离散分数傅里叶变换衍生的各种离散分数变换,包括离散分数余弦变换、离散分数希尔伯特变换、多参数离散分数傅里叶变换、离散分数随机变换等;

3) 信号的采样与重构是信号处理中的一个基础问题,文中主要介绍了三种采样模型:均匀采样、非均匀采样和多通道采样,涉及的信号类型包括确定性信号和随机信号;

4) 建立在分数域滤波基础上的信号检测与参数估计是雷达、通信信号处理中的关键技术,目前取得的研究成果包括:分数域卷积定理、分数相关和分数功率谱、短时分数傅里叶变换、稀疏离散分数傅里叶变换等;

5) 多域分析是分数域信号处理的特色之一,分数域不确定性原理揭示了多分数域分解的分辨率机理,多域分析已在多分数域信息复用和信息安全领域得到良好应用;

6) 工程实践中遇到的许多信号都是 Chirp 信号,如雷达回波信号、通信信号、光学干涉信号、工业领域的故障信号等。分数傅里叶变换适合处理 Chirp 信号,在上述领域中得到了广泛应用。除此之外,分数傅里叶变换也被应用于医学、图像加密、生物特征识别等领域。

### 9.2 展望

分数傅里叶变换在理论研究方面尚有不足,在工程实践中的应用仍需进一步推进,其未来研究方向包括:

1) 具有低计算复杂度的数值计算方法。目前离散分数傅里叶变换的数值计算方法仍具有很高的计算复

杂度,大大限制了分数傅里叶变换在工程实践中的应用。该方向可基于稀疏离散分数傅里叶变换进行更为深入的探索。

2) 将分数域采样理论与压缩感知相结合,进一步降低采样率。多路并行高速 A/D 采样,该模型可看作多通道采样与时钟抖动引起的非均匀采样的结合。基于随机信号的采样理论仍有许多问题可探索。

3) 推进分数傅里叶变换在雷达、通信、光学干涉测量等领域的应用。针对分数域雷达信号处理,开展高加速目标的距离徙动及基于分数阶傅里叶变换的多普勒频率徙动补偿算法研究,提升高速高加速目标的信号处理增益。研究随机信号在分数域的统计特性,开展分数域信号建模、杂波抑制等算法研究,提高目标识别的概率。针对分数域通信信号处理,研究基于稀疏分数傅里叶变换的深度扩频快捕技术和多通道累加的信噪比补偿技术等。针对分数域光学干涉测量中存在算法计算量大、系统复杂度高等问题,研究二维 Chirp 信号的采样和量化算法,完成对干涉条纹的低速和低量化位数的采样和高精度重构。

4) 将分数傅里叶变换与机器学习结合。分数傅里叶变换可以提供图像在多个分数域的特征,这些特征有助于机器学习对图像分类。

5) 基于分数傅里叶变换的图信号处理。基于傅里叶变换的图信号处理是当下的一个研究热点。可研究基于图分数傅里叶变换的采样、滤波等理论,并进一步探索分数域图信号处理在复杂系统中的监控、分析、决策等问题中的应用。

6) 研究分数傅里叶变换的量子算法,利用量子计算的特性减少分数傅里叶变换的计算复杂度,利用量子电路实现离散分数傅里叶变换,探究其在速度上的优势,并将其应用到实际当中。

## 参考文献

- [1] Wiener N. Hermitian polynomials and Fourier analysis[J]. *Journal of Mathematics and Physics*, 1929, 8(1-4): 70-73.
- [2] Namias V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics[J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1980, 25(3): 241-265.
- [3] McBride A C, Kerr F H. On namias's fractional Fourier transforms[J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1987, 39(2): 159-175.
- [4] Mendlovic D, Ozaktas H M. Fractional Fourier transforms and their optical implementation: I[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1993, 10(9): 1875-1881.
- [5] Ozaktas H M, Mendlovic D. Fractional Fourier transforms and their optical implementation. II[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1993, 10(12): 2522-2531.

- [6] Kang X J. Discrete fractional transforms and their applications to image encryption[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2016.  
康学净. 离散分数变换及其在图像加密中的应用[D]. 北京: 北京理工大学, 2016.
- [7] Almeida L B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, **42**(11): 3084–3091.
- [8] Ozaktas H M, Barshan B, Onural L, et al. Filtering in fractional Fourier domains and their relation to Chirp transforms[C]// *Proceedings of the 7th Mediterranean Electrotechnical Conference*, 1994: 77–79.
- [9] Zayed A I. On the relationship between the Fourier and fractional Fourier transforms[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 1996, **3**(12): 310–311.
- [10] Cariolaro G, Erseghe T, Kraniuskas P, et al. A unified framework for the fractional Fourier transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, **46**(12): 3206–3219.
- [11] Tao R, Deng B, Wang Y. Research progress of the fractional Fourier transform in signal processing[J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2006, **49**(1): 1–25.
- [12] Tao R, Zhang F, Wang Y. Research progress on discretization of fractional Fourier transform[J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2008, **51**(7): 859–880.
- [13] Sejdic E, Djurovic I, Stankovic L. Fractional Fourier transform as a signal processing tool: an overview of recent developments[J]. *Signal Processing*, 2011, **91**(6): 1351–1369.
- [14] Saxena R, Singh K. Fractional Fourier transform: a novel tool for signal processing[J]. *Journal of the Indian Institute of Science*, 2005, **85**: 11–26.
- [15] Zhang Y D, Wang S H, Yang J F, et al. A comprehensive survey on fractional Fourier transform[J]. *Fundamenta Informaticae*, 2017, **151**(1–4): 1–48.
- [16] Tao R, Deng B, Wang Y. *Fractional Fourier Transform and Its Applications*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009.  
陶然, 邓兵, 王越. 分数阶傅里叶变换及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.
- [17] Ozaktas H M, Zalevsky Z, Kutay M A. *The Fractional Fourier Transform: with Applications in Optics and Signal Processing* [M]. New York: Wiley, 2001.
- [18] Ozaktas H M, Barshan B, Mendlovic D, et al. Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to Chirp and wavelet transforms[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1994, **11**(2): 547–559.
- [19] Pei S C, Ding J J. Relations between Gabor transforms and fractional Fourier transforms and their applications for signal processing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, **55**(10): 4839–4850.
- [20] Pendry J B. Negative refraction makes a perfect lens[J]. *Physical Review Letters*, 2000, **85**(18): 3966–3969.
- [21] Richman M S, Parks T W. Understanding discrete rotations[C]// *Proceedings of 1997 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1997, **3**: 2057–2060.
- [22] Deng X G, Li Y P, Fan D Y, et al. A fast algorithm for fractional Fourier transforms[J]. *Optics Communications*, 1997, **138**(4–6): 270–274.
- [23] Ikram M Z, Abed-Meraim K, Hua Y B. Fast quadratic phase transform for estimating the parameters of multicomponent Chirp signals[J]. *Digital Signal Processing*, 1997, **7**(2): 127–135.
- [24] Bi G A, Wei Y M, Li G, et al. Radix-2 DIF fast algorithms for polynomial time-frequency transforms[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2006, **42**(4): 1540–1546.
- [25] Ju Y T, Bi G A. Generalized fast algorithms for the polynomial time-frequency transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, **55**(10): 4907–4915.
- [26] Bi G A, Ju Y T, Li X M. Fast algorithms for polynomial time-frequency transforms of real-valued sequences[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, **56**(5): 1905–1915.
- [27] Ozaktas H M, Arıkan O, Kutay M A, et al. Digital computation of the fractional Fourier transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, **44**(9): 2141–2150.
- [28] Pei S C, Ding J J. Closed-form discrete fractional and affine Fourier transforms[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, **48**(5): 1338–1353.
- [29] Dickinson B W, Steiglitz K. Eigenvectors and functions of the discrete Fourier transform[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1982, **30**(1): 25–31.
- [30] Pei S C, Yeh M H. Improved discrete fractional Fourier transform[J]. *Optics Letters*, 1997, **22**(14): 1047–1049.
- [31] Pei S C, Yeh M H, Tseng C C. Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, **47**(5): 1335–1348.
- [32] Pei S C, Hsue W L, Ding J J. Discrete fractional Fourier transform based on new nearly tridiagonal commuting matrices[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **54**(10): 3815–3828.
- [33] Candan C. On higher order approximations for Hermite–Gaussian functions and discrete fractional Fourier transforms[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, **14**(10): 699–702.
- [34] Pei S C, Hsue W L, Ding J J. DFT-commuting matrix with arbitrary or infinite order second derivative approximation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(1): 390–394.
- [35] Serbes A, Durak-Ata L. Efficient computation of DFT commuting matrices by a closed-form infinite order approximation to the second differentiation matrix[J]. *Signal Processing*, 2011, **91**(3): 582–589.
- [36] Pei S C, Tseng C C, Yeh M H. A new discrete fractional Fourier transform based on constrained eigendecomposition of DFT matrix by Lagrange multiplier method[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 1999, **46**(9): 1240–1245.
- [37] Candan C, Kutay M A, Ozaktas H M. The discrete fractional Fourier transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, **48**(5): 1329–1337.
- [38] Candan C. On the eigenstructure of DFT matrices [DSP education][J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2011, **28**(2): 105–108.
- [39] Serbes A, Durak-Ata L. The discrete fractional Fourier transform based on the DFT matrix[J]. *Signal Processing*, 2011, **91**(3): 571–581.
- [40] Hanna M T. The direct batch generation of Hermite-Gaussian-like eigenvectors of the DFT matrix using the notion of matrix pseudoinverse[C]// *Proceedings of 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 2013: 6063–6067.
- [41] De Oliveira Neto J R, Lima J B. Discrete fractional Fourier transforms based on closed-form Hermite–Gaussian-like DFT eigenvectors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, **65**(23): 6171–6184.
- [42] Qi L, Tao R, Zhou S Y, et al. Detection and parameter

- estimation of multicomponent LFM signal based on the fractional Fourier transform[J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2004, **47**(2): 184–198.
- [43] Sui L S, Xin M T, Tian A L. Multiple-image encryption based on phase mask multiplexing in fractional Fourier transform domain[J]. *Optics Letters*, 2013, **38**(11): 1996–1998.
- [44] Wang Q, Guo Q, Lei L, *et al.* Iterative partial phase encoding based on joint fractional Fourier transform correlator adopting phase-shifting digital holography[J]. *Optics Communications*, 2014, **313**: 1–8.
- [45] Zhu B H, Liu S T, Ran Q W. Optical image encryption based on multifractional Fourier transforms[J]. *Optics Letters*, 2000, **25**(16): 1159–1161.
- [46] Pei S C, Tseng C C, Yeh M H, *et al.* Discrete fractional Hartley and Fourier transforms[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 1998, **45**(6): 665–675.
- [47] Santhanam B, McClellan J H. The discrete rotational Fourier transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, **44**(4): 994–998.
- [48] Pei S C, Yeh M H. The discrete fractional cosine and sine transforms[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, **49**(6): 1198–1207.
- [49] Pei S C, Ding J J. Fractional cosine, sine, and Hartley transforms[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, **50**(7): 1661–1680.
- [50] Tseng C C. Eigenvalues and eigenvectors of generalized DFT, generalized DHT, DCT-IV and DST-IV matrices[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, **50**(4): 866–877.
- [51] Erseghe T, Cariolaro G. Efficient DFT architectures based upon symmetries[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **54**(10): 3829–3838.
- [52] Pei S C, Hsue W L. Tridiagonal commuting matrices and fractionalizations of DCT and DST matrices of types I, IV, V, and VIII[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, **56**(6): 2357–2369.
- [53] Wei D Y, Li Y M. Novel tridiagonal commuting matrices for types I, IV, V, VIII DCT and DST matrices[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, **21**(4): 483–487.
- [54] Lohmann A W, Mendlovic D, Zalevsky Z. Fractional Hilbert transform[J]. *Optics Letters*, 1996, **21**(4): 281–283.
- [55] Davis J A, McNamara D E, Cottrell D M. Analysis of the fractional Hilbert transform[J]. *Applied Optics*, 1998, **37**(29): 6911–6913.
- [56] Pei S C, Yeh M H. Discrete fractional Hilbert transform[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 2000, **47**(11): 1307–1311.
- [57] Tseng C C, Pei S C. Design and application of discrete-time fractional Hilbert transformer[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 2000, **47**(12): 1529–1533.
- [58] Tao R, Li X M, Wang Y. Generalization of the fractional Hilbert transform[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2008, **15**: 365–368.
- [59] Hsue W L, Pei S C. The multiple-parameter discrete fractional Fourier transform and its application[C]//*Proceedings of 2006 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 2006, **3**: 2867–2870.
- [60] Pei S C, Hsue W L. The multiple-parameter discrete fractional Fourier transform[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2006, **13**(6): 329–332.
- [61] Lang J, Tao R, Ran Q W, *et al.* The multiple-parameter fractional Fourier transform[J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2008, **51**(8): 1010–1024.
- [62] Lang J, Tao R, Wang Y. The discrete multiple-parameter fractional Fourier transform[J]. *Science China Information Sciences*, 2010, **53**(11): 2287–2299.
- [63] Ran Q W, Zhang H Y, Zhang J, *et al.* Deficiencies of the cryptography based on multiple-parameter fractional Fourier transform[J]. *Optics Letters*, 2009, **34**(11): 1729–1731.
- [64] Lang J. The reality-preserving multiple-parameter fractional Fourier transform and its application to image encryption[C]//*Proceedings of the 2012 5th International Congress on Image and Signal Processing*, 2012: 1153–1157.
- [65] Kang X J, Tao R, Zhang F. Multiple-parameter discrete fractional transform and its applications[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, **64**(13): 3402–3417.
- [66] Liu Z J, Zhao H F, Liu S T. A discrete fractional random transform[J]. *Optics Communications*, 2005, **255**(4–6): 357–365.
- [67] Liu Z J, Guo Q, Liu S T. The discrete fractional random cosine and sine transforms[J]. *Optics Communications*, 2006, **265**(1): 100–105.
- [68] Liu Z J, Liu S T. Random fractional Fourier transform[J]. *Optics Letters*, 2007, **32**(15): 2088–2090.
- [69] Pei S C, Hsue W L. Random discrete fractional Fourier transform[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2009, **16**(12): 1015–1018.
- [70] Kang X J, Zhang F, Tao R. Multichannel random discrete fractional Fourier transform[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, **22**(9): 1340–1344.
- [71] Pei S C, Yeh M H. Discrete fractional Hadamard transform[C]//*Proceedings of 1999 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 1999, **3**: 179–182.
- [72] Tseng C C. Eigenvector and fractionalization of discrete Hadamard transform[C]//*Proceedings of 2007 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 2007, 2307–2310.
- [73] Tao R, Lang J, Wang Y. The multiple-parameter discrete fractional Hadamard transform[J]. *Optics Communications*, 2009, **282**(8): 1531–1535.
- [74] Liu Z J, Ahmad M A, Liu S T. A discrete fractional angular transform[J]. *Optics Communications*, 2008, **281**(6): 1424–1429.
- [75] Lammers M. The finite fractional Zak transform[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, **21**(9): 1064–1067.
- [76] Ran Q W, Yeung D S, Tsang E C C, *et al.* General multifractional Fourier transform method based on the generalized permutation matrix group[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, **53**(1): 83–98.
- [77] Xia X G. On bandlimited signals with fractional Fourier transform[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 1996, **3**(3): 72–74.
- [78] Candan Ç, Ozaktas H M. Sampling and series expansion theorems for fractional Fourier and other transforms[J]. *Signal Processing*, 2003, **83**(11): 2455–2457.
- [79] Erseghe T, Kraniuskas P, Cariolaro G. Unified fractional Fourier transform and sampling theorem[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, **47**(12): 3419–3423.
- [80] Wei D Y, Ran Q W, Li Y M. Sampling of fractional bandlimited signals associated with fractional Fourier transform[J]. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 2012, **123**(2): 137–139.
- [81] Deng B, Tao R, Wang Y. Convolution theorems for the linear

- canonical transform and their applications[J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2006, **49**(5): 592–603.
- [82] Meng X Y, Tao R, Wang Y. Fractional Fourier domain analysis of decimation and interpolation[J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2007, **50**(4): 521–538.
- [83] Tao R, Deng B, Zhang W Q, *et al.* Sampling and sampling rate conversion of band limited signals in the fractional Fourier transform domain[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, **56**(1): 158–171.
- [84] Zhao J, Tao R, Wang Y. Sampling rate conversion for linear canonical transform[J]. *Signal Processing*, 2008, **88**(11): 2825–2832.
- [85] Zayed A I, Garcia A G. New sampling formulae for the fractional Fourier transform[J]. *Signal Processing*, 1999, **77**(1): 111–114.
- [86] Li B Z, Tao R, Wang Y. New sampling formulae related to linear canonical transform[J]. *Signal Processing*, 2007, **87**(5): 983–990.
- [87] Vetterli M, Marziliano P, Blu T. Sampling signals with finite rate of innovation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, **50**(6): 1417–1428.
- [88] Bhandari A, Marziliano P. Sampling and reconstruction of sparse signals in fractional Fourier domain[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2010, **17**(3): 221–224.
- [89] Liu Y L, Kou K I, Ho I T. New sampling formulae for non-bandlimited signals associated with linear canonical transform and nonlinear Fourier atoms[J]. *Signal Processing*, 2010, **90**(3): 933–945.
- [90] Shi J, Liu X P, Sha X J, *et al.* Sampling and reconstruction of signals in function spaces associated with the linear canonical transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(11): 6041–6047.
- [91] Liu X P, Shi J, Sha X J, *et al.* Sampling expansion in function spaces associated with the linear canonical transform[J]. *Signal, Image and Video Processing*, 2014, **8**(1): 143–148.
- [92] Shi J, Xiang W, Liu X P, *et al.* A sampling theorem for the fractional Fourier transform without band-limiting constraints[J]. *Signal Processing*, 2014, **98**: 158–165.
- [93] Liu X P, Shi J, Sha X J, *et al.* A general framework for sampling and reconstruction in function spaces associated with fractional Fourier transform[J]. *Signal Processing*, 2015, **107**: 319–326.
- [94] Bhandari A, Zayed A I. Shift-invariant and sampling spaces associated with the fractional Fourier transform domain[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(4): 1627–1637.
- [95] Li B Z, Tao R, Xu T Z, *et al.* The Poisson sum formulae associated with the fractional Fourier transform[J]. *Signal Processing*, 2009, **89**(5): 851–856.
- [96] Tao R, Li B Z, Wang Y. Spectral analysis and reconstruction for periodic nonuniformly sampled signals in fractional Fourier domain[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, **55**(7): 3541–3547.
- [97] Tao R, Li B Z, Wang Y, *et al.* On sampling of band-limited signals associated with the linear canonical transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, **56**(11): 5454–5464.
- [98] Xu L Y, Zhang F, Tao R. Fractional spectral analysis of randomly sampled signals and applications[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2017, **66**(11): 2869–2881.
- [99] Xu L Y, Zhang F, Tao R. Randomized nonuniform sampling and reconstruction in fractional Fourier domain[J]. *Signal Processing*, 2016, **120**: 311–322.
- [100] Liu X P, Shi J, Xiang W, *et al.* Sampling expansion for irregularly sampled signals in fractional Fourier transform domain[J]. *Digital Signal Processing*, 2014, **34**: 74–81.
- [101] Maymon S, Oppenheim A V. Sinc interpolation of nonuniform samples[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, **59**(10): 4745–4758.
- [102] Zhao H, Ran Q W, Tan L Y, *et al.* Reconstruction of bandlimited signals in linear canonical transform domain from finite nonuniformly spaced samples[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2009, **16**(12): 1047–1050.
- [103] Zhao H, Ran Q W, Ma J, *et al.* On bandlimited signals associated with linear canonical transform[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2009, **16**(5): 343–345.
- [104] Ran Q W, Zhao H, Tan L Y, *et al.* Sampling of bandlimited signals in fractional Fourier transform domain[J]. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 2010, **29**(3): 459–467.
- [105] Zhang F, Tao R, Wang Y. Multi-channel sampling theorems for band-limited signals with fractional Fourier transform[J]. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2008, **51**(6): 790–802.
- [106] Wei D Y, Ran Q W, Li Y M. Generalized sampling expansion for bandlimited signals associated with the fractional Fourier transform[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2010, **17**(6): 595–598.
- [107] Shi J, Chi Y G, Zhang N T. Multichannel sampling and reconstruction of bandlimited signals in fractional Fourier domain[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2010, **17**(11): 909–912.
- [108] Wei D Y, Ran Q W, Li Y M. Multichannel sampling and reconstruction of bandlimited signals in the linear canonical transform domain[J]. *IET Signal Processing*, 2011, **5**(8): 717–727.
- [109] Wei D Y, Ran Q W, Li Y M. Reconstruction of band-limited signals from multichannel and periodic nonuniform samples in the linear canonical transform domain[J]. *Optics Communications*, 2011, **284**(19): 4307–4315.
- [110] Wei D Y, Li Y M. Multichannel sampling theorem for bandpass signals in the linear canonical transform domain[J]. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 2014, **125**(14): 3434–3438.
- [111] Wei D Y. Multi-channel sampling expansion for band-pass signals without channels constraints[J]. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 2016, **127**(8): 4047–4052.
- [112] Wei D Y, Li Y M. Generalized sampling expansions with multiple sampling rates for lowpass and bandpass signals in the fractional Fourier transform domain[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, **64**(18): 4861–4874.
- [113] Shi J, Liu X P, He L, *et al.* Sampling and reconstruction in arbitrary measurement and approximation spaces associated with linear canonical transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, **64**(24): 6379–6391.
- [114] Xu L Y, Tao R, Zhang F. Multichannel consistent sampling and reconstruction associated with linear canonical transform[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2017, **24**(5): 658–662.
- [115] Tao R, Zhang F, Wang Y. Fractional power spectrum[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, **56**(9): 4199–4206.
- [116] Tao R, Zhang F, Wang Y. Sampling random signals in a fractional Fourier domain[J]. *Signal Processing*, 2011, **91**(6): 1394–1400.
- [117] Torres R, Lizarazo Z, Torres E. Fractional sampling theorem for  $\alpha$ -bandlimited random signals and its relation to the von Neumann ergodic theorem[J]. *IEEE Transactions on Signal*

- Processing*, 2014, **62**(14): 3695–3705.
- [118] Huo H Y, Sun W C. Sampling theorems and error estimates for random signals in the linear canonical transform domain[J]. *Signal Processing*, 2015, **111**: 31–38.
- [119] Almeida L B. Product and convolution theorems for the fractional Fourier transform[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 1997, **4**(1): 15–17.
- [120] Zayed A I. A convolution and product theorem for the fractional Fourier transform[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 1998, **5**(4): 101–103.
- [121] Akay O, Boudreaux-Bartels G F. Fractional convolution and correlation via operator methods and an application to detection of linear FM signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, **49**(5): 979–993.
- [122] Zhang Z C. New convolution structure for the linear canonical transform and its application in filter design[J]. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 2016, **127**(13): 5259–5263.
- [123] Bahri M, Amir A K, Ashino R. Correlation formulation using relationship between convolution and correlation in linear canonical transform domain[C]//*Proceedings of 2017 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition*, 2017: 177–182.
- [124] Shi J, Liu X P, Zhang N T. Generalized convolution and product theorems associated with linear canonical transform[J]. *Signal, Image and Video Processing*, 2014, **8**(5): 967–974.
- [125] Shi J, Sha X J, Song X C, et al. Generalized convolution theorem associated with fractional Fourier transform[J]. *Wireless Communications and Mobile Computing*, 2014, **14**(13): 1340–1351.
- [126] Wei D Y, Ran Q W. Multiplicative filtering in the fractional Fourier domain[J]. *Signal, Image and Video Processing*, 2013, **7**(3): 575–580.
- [127] Goel N, Singh K, Saxena R, et al. Multiplicative filtering in the linear canonical transform domain[J]. *IET Signal Processing*, 2016, **10**(2): 173–181.
- [128] Mendlovic D, Ozaktas H M, Lohmann A W. Fractional correlation[J]. *Applied Optics*, 1995, **34**(2): 303–309.
- [129] Bitran Y, Zalevsky Z, Mendlovic D, et al. Fractional correlation operation: performance analysis[J]. *Applied Optics*, 1996, **35**(2): 297–303.
- [130] Granieri S, Arizaga R, Sicre E E. Optical correlation based on the fractional Fourier transform[J]. *Applied Optics*, 1997, **36**(26): 6636–6645.
- [131] Capus C, Brown K. Short-time fractional Fourier methods for the time-frequency representation of chirp signals[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2003, **113**(6): 3253–3263.
- [132] Catherall A T, Williams D P. Detecting non-stationary signals using fractional Fourier methods [EB/OL]. <http://www.ima.org.uk/Conferences/mathssignalprocessing2006/williams.pdf>
- [133] Zhang F, Bi G A, Chen Y Q. Chip signal analysis by using adaptive short-time fractional Fourier transform[C]//*Proceedings of the 2000 10th European Signal Processing Conference*, 2000: 1–4.
- [134] Tao R, Li Y L, Wang Y. Short-time fractional Fourier transform and its applications[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **58**(5): 2568–2580.
- [135] Liu S H, Shan T, Tao R, et al. Sparse discrete fractional Fourier transform and its applications[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, **62**(24): 6582–6595.
- [136] Hassanieh H, Indyk P, Katabi D, et al. Simple and practical algorithm for sparse Fourier transform[C]//*Proceedings of the 23rd Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 2012: 1183–1194.
- [137] Gilbert A C, Indyk P, Iwen M, et al. Recent developments in the sparse Fourier transform: a compressed Fourier transform for big data[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2014, **31**(5): 91–100.
- [138] Liu S H. Sparse fractional Fourier transform and its applications in exploration[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2016. 刘升恒. 稀疏分数傅里叶变换理论及其在探测中的应用[D]. 北京: 北京理工大学, 2016.
- [139] Kutay A, Ozaktas H M, Ankan O, et al. Optimal filtering in fractional Fourier domains[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1997, **45**(5): 1129–1143.
- [140] Sharma K K, Joshi S D. Signal separation using linear canonical and fractional Fourier transforms[J]. *Optics Communications*, 2006, **265**(2): 454–460.
- [141] Barshan B, Kutay M A, Ozaktas H M. Optimal filtering with linear canonical transformations[J]. *Optics Communications*, 1997, **135**(1–3): 32–36.
- [142] Kutay M A, Ozaktas H M. Optimal image restoration with the fractional Fourier transform[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1998, **15**(4): 825–833.
- [143] Kutay M A. Generalized filtering configurations with applications in digital and optical signal and image processing[D]. Turkish: Bilkent University, 1999.
- [144] Erden M F, Kutay M A, Ozaktas H M. Repeated filtering in consecutive fractional Fourier domains and its application to signal restoration[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, **47**(5): 1458–1462.
- [145] Qi L, Tao R, Zhou S Y, et al. An approach for optimal filtering of LFM signal[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2004, **32**(9): 1464–1467. 齐林, 陶然, 周思永, 等. LFM信号的一种最优滤波算法[J]. 电子学报, 2004, **32**(9): 1464–1467.
- [146] Liu F, Xu H F, Tao R, et al. Research on resolution between multi-component LFM signals in the fractional Fourier domain[J]. *Science China Information Sciences*, 2012, **55**(6): 1301–1312.
- [147] Tao R, Li X M, Li Y L, et al. Time-delay estimation of chirp signals in the fractional Fourier domain[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(7): 2852–2855.
- [148] Hao H Y. Multi component LFM signal detection and parameter estimation based on EEMD-FRFT[J]. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 2013, **124**(23): 6093–6096.
- [149] Mustard D. Uncertainty principles invariant under the fractional Fourier transform[J]. *The ANZIAM Journal*, 1991, **33**(2): 180–191.
- [150] Ozaktas H M, Aytür O. Fractional Fourier domains[J]. *Signal Processing*, 1995, **46**(1): 119–124.
- [151] Aytür O, Ozaktas H M. Non-orthogonal domains in phase space of quantum optics and their relation to fractional Fourier transforms[J]. *Optics Communications*, 1995, **120**(3–4): 166–170.
- [152] Akay O, Boudreaux-Bartels G F. New fractional operators and their properties: a generalization of time and frequency operators[C]//*Proceedings of 1997 UK Symposium on Applications of Time-Frequency and Time-Scale Methods*, 1997: 141–144.
- [153] Shinde S, Gadre V M. An uncertainty principle for real signals in the fractional Fourier transform domain[J]. *IEEE*

- Transactions on Signal Processing*, 2001, **49**(11): 2545–2548.
- [154] Capus C, Brown K. Fractional Fourier transform of the Gaussian and fractional domain signal support[J]. *IEEE Proceedings-Vision, Image, and Signal Processing*, 2003, **150**(2): 99–106.
- [155] Xu G L, Wang X T, Xu X G. Generalized entropic uncertainty principle on fractional Fourier transform[J]. *Signal Processing*, 2009, **89**(12): 2692–2697.
- [156] Zhao J, Tao R, Li Y L, et al. Uncertainty principles for linear canonical transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(7): 2856–2858.
- [157] Shi J, Liu X P, Zhang N T. On uncertainty principle for signal concentrations with fractional Fourier transform[J]. *Signal Processing*, 2012, **92**(12): 2830–2836.
- [158] Dang P, Deng G T, Qian T. A tighter uncertainty principle for linear canonical transform in terms of phase derivative[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, **61**(21): 5153–5164.
- [159] Mendlovic D, Lohmann A W. Space–bandwidth product adaptation and its application to superresolution: fundamentals[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1997, **14**(3): 558–562.
- [160] Meng X Y. Theories and applications of multirate filter banks in fractional Fourier domain[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2010.  
孟祥意. 分数阶傅里叶域多抽样率滤波器组理论及应用[D]. 北京: 北京理工大学, 2010.
- [161] Martone M. A multicarrier system based on the fractional Fourier transform for time-frequency-selective channels[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2001, **49**(6): 1011–1020.
- [162] Tao R, Meng X Y, Wang Y. Transform order division multiplexing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, **59**(2): 598–609.
- [163] Tao R, Xin Y, Wang Y. Double image encryption based on random phase encoding in the fractional Fourier domain[J]. *Optics Express*, 2007, **15**(24): 16067–16079.
- [164] Tao R, Meng X Y, Wang Y. Image encryption with multiorders of fractional Fourier transforms[J]. *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*, 2010, **5**(4): 734–738.
- [165] Sun H B, Liu G S, Gu H, et al. Application of the fractional Fourier transform to moving target detection in airborne SAR[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2002, **38**(4): 1416–1424.
- [166] Tao R, Zhang N, Wang Y. Analysing and compensating the effects of range and Doppler frequency migrations in linear frequency modulation pulse compression radar[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2011, **5**(1): 12–22.
- [167] Pang C S, Shan T, Tao R, et al. Detection of high-speed and accelerated target based on the linear frequency modulation radar[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2014, **8**(1): 37–47.
- [168] Guan J, Chen X L, Huang Y, et al. Adaptive fractional Fourier transform-based detection algorithm for moving target in heavy sea clutter[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2012, **6**(5): 389–401.
- [169] Chen Z, Wang H Y, Qiu T S. The study of ambiguity function based on fractional Fourier transform[J]. *Signal Processing*, 2003, **19**(6): 499–502.  
陈喆, 王宏禹, 邱天爽. 基于分数阶傅立叶变换的模糊函数的研究[J]. *信号处理*, 2003, **19**(6): 499–502.
- [170] Chen X L, Guan J, Bao Z H, et al. Detection and extraction of target with micromotion in spiky sea clutter via short-time fractional Fourier transform[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2014, **52**(2): 1002–1018.
- [171] Chen X L, Guan J, Liu N B, et al. Maneuvering target detection via Radon-fractional Fourier transform-based long-time coherent integration[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, **62**(4): 939–953.
- [172] Tian J, Xia X G, Cui W, et al. A coherent integration method via Radon-NUFrFT for random PRI radar[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2017, **53**(4): 2010–2109.
- [173] Amein A S, Soraghan J J. A new chirp scaling algorithm based on the fractional Fourier transform[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, **12**(10): 705–708.
- [174] Yi H, Fan C Y, Yang J G, et al. Imaging and locating multiple ground moving targets based on keystone transform and FrFT for single channel SAR system[C]//*Proceedings of the 2nd Asian-Pacific Conference on Synthetic Aperture Radar*, 2009: 771–774.
- [175] Wang W Q. Moving target indication via three-antenna SAR with simplified fractional Fourier transform[J]. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2011, **2011**(1): 117.
- [176] Wang Q, Pepin M, Beach R J, et al. SAR-based vibration estimation using the discrete fractional Fourier transform[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2012, **50**(10): 4145–4156.
- [177] Bu H X, Bai X, Tao R. Compressed sensing SAR imaging based on sparse representation in fractional Fourier domain[J]. *Science China Information Sciences*, 2012, **55**(8): 1789–1800.
- [178] Sun G C, Xing M D, Xia X G, et al. A unified focusing algorithm for several modes of SAR based on FrFT[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2013, **51**(5): 3139–3155.
- [179] Singh J, Datcu M. SAR image categorization with log cumulants of the fractional Fourier transform coefficients[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2013, **51**(12): 5273–5282.
- [180] Chen S, Zhang S N, Zhao H C, et al. A new chirp scaling algorithm for highly squinted missile-borne SAR based on FrFT[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2015, **8**(8): 3977–3987.
- [181] Pelich R, Longépé N, Mercier G, et al. Vessel refocusing and velocity estimation on SAR imagery using the fractional Fourier transform[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2016, **54**(3): 1670–1684.
- [182] Wang T. Chirp-based physical-layer secure communication signal design and processing[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2017.  
王腾. Chirp 基物理层安全通信信号设计及处理技术[D]. 北京: 北京理工大学, 2017.
- [183] Chen E Q, Tao R, Zhang W Q. A method for time-varying channel parameter estimation based on fractional Fourier transform[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2005, **33**(12): 2101–2104.  
陈恩庆, 陶然, 张卫强. 一种基于分数阶傅立叶变换的时变信道参数估计方法[J]. *电子学报*, 2005, **33**(12): 2101–2104.
- [184] Chen E Q, Tao R, Zhang W Q, et al. The OFDM system and equalization algorithm based on the fractional Fourier transform[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2007, **35**(3): 409–414.  
陈恩庆, 陶然, 张卫强, 等. 一种基于分数阶傅里叶变换的 OFDM 系统及其均衡算法[J]. *电子学报*, 2007, **35**(3): 409–414.
- [185] Yang Q, Tao R, Wang Y, et al. MIMO-OFDM system based on fractional Fourier transform and selecting algorithm for optimal order[J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2008, **51**(9): 1360–1371.
- [186] Zheng J, Wang Z L. ICI analysis for FRFT-OFDM systems to

- frequency offset in time-frequency selective fading channels[J]. *IEEE Communications Letters*, 2010, **14**(10): 888–890.
- [187] Wang H Q, Ma H. MIMO OFDM systems based on the optimal fractional Fourier transform[J]. *Wireless Personal Communications*, 2010, **55**(2): 265–272.
- [188] Wang H Q. A novel multiuser SISO-BOFDM systems with group fractional Fourier transforms scheme[J]. *Wireless Personal Communications*, 2013, **69**(2): 735–743.
- [189] Kumari S, Rai S K, Kumar A, et al. Exact BER analysis of FRFT-OFDM system over frequency selective Rayleigh fading channel with CFO[J]. *Electronics Letters*, 2013, **49**(20): 1299–1301.
- [190] Mokhtari Z, Sabbaghian M. Near-optimal angle of transform in FRFT-OFDM systems based on ICI analysis[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2016, **65**(7): 5777–5783.
- [191] Cheng M, Deng L, Wang X, et al. Enhanced secure strategy for OFDM-PON system by using hyperchaotic system and fractional Fourier transformation[J]. *IEEE Photonics Journal*, 2014, **6**(6): 7903409.
- [192] Deng L, Cheng M F, Wang X L, et al. Secure OFDM-PON system based on chaos and fractional Fourier transform techniques[J]. *Journal of Lightwave Technology*, 2014, **32**(15): 2629–2635.
- [193] Wen H, Tang J, Wu J S, et al. A cross-layer secure communication model based on Discrete Fractional Fourier Transform (DFRFT)[J]. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computing*, 2015, **3**(1): 119–126.
- [194] Wang T, Huan H, Tao R, et al. Security-coded OFDM system based on multiorder fractional Fourier transform[J]. *IEEE Communications Letters*, 2016, **20**(12): 2474–2477.
- [195] Wang T, Huan H, Tao R, et al. Anti-eavesdropping FrFT-OFDM System exploiting multipath channel characteristics[J]. *IET Communications*, 2017, **11**(9): 1371–1378.
- [196] Chen L F, Zhao D M, Ge F. Image encryption based on singular value decomposition and Arnold transform in fractional domain[J]. *Optics Communications*, 2013, **291**: 98–103.
- [197] Keshari S, Modani S G. Color image encryption scheme based on 4-weighted fractional Fourier transform[J]. *Journal of Electronic Imaging*, 2012, **21**(3): 033018.
- [198] Joshi M, Chandrashakher, Singh K. Color image encryption and decryption for twin images in fractional Fourier domain[J]. *Optics Communications*, 2008, **281**(23): 5713–5720.
- [199] Unnikrishnan G, Joseph J, Singh K. Optical encryption by double-random phase encoding in the fractional Fourier domain[J]. *Optics Letters*, 2000, **25**(12): 887–889.
- [200] Liu S T, Yu L, Zhu B H. Optical image encryption by cascaded fractional Fourier transforms with random phase filtering[J]. *Optics Communications*, 2001, **187**(1–3): 57–63.
- [201] Hennelly B, Sheridan J T. Optical image encryption by random shifting in fractional Fourier domains[J]. *Optics Letters*, 2003, **28**(4): 269–271.
- [202] Liu Z J, Liu S T. Double image encryption based on iterative fractional Fourier transform[J]. *Optics Communications*, 2007, **275**(2): 324–329.
- [203] Joshi M, Shakher C, Singh K. Logarithms-based RGB image encryption in the fractional Fourier domain: a non-linear approach[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2009, **47**(6): 721–727.
- [204] Singh N, Sinha A. Optical image encryption using improper Hartley transforms and chaos[J]. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 2010, **121**(10): 918–925.
- [205] Sui L S, Gao B. Single-channel color image encryption based on iterative fractional Fourier transform and chaos[J]. *Optics & Laser Technology*, 2013, **48**: 117–127.
- [206] Lu M F, Zhang F, Tao R, et al. Parameter estimation of optical fringes with quadratic phase using the fractional Fourier transform[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2015, **74**: 1–16.
- [207] Nascov V, Dobroiu A, Apostol D, et al. Statistical errors on Newton fringe pattern digital processing[J]. *Proceedings of SPIE*, 2004, **5581**: 788–796.
- [208] Nascov V, Apostol D, Garoi F. Statistical processing of Newton's rings using discrete Fourier analysis[J]. *Optical Engineering*, 2007, **46**(2): 028201.
- [209] Gorthi S S, Rastogi P. Estimation of phase derivatives using discrete chirp-Fourier-transform-based method[J]. *Optics Letters*, 2009, **34**(16): 2396–2398.
- [210] Wu J M, Lu M F, Tao R, et al. Improved FRFT-based method for estimating the physical parameters from Newton's rings[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2017, **91**: 178–186.
- [211] Guo Y, Li B Z. Novel method for parameter estimation of Newton's rings based on CFRFT and ER-WCA[J]. *Signal Processing*, 2018, **144**: 118–126.
- [212] Parot V, Sing-Long C, Lizama C, et al. Application of the fractional Fourier transform to image reconstruction in MRI[J]. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2012, **68**(1): 17–29.
- [213] Shang Y, Xu T, He Y H. The applications of the fractional Fourier transform in the ECG processing[J]. *Electronic Science and Technology*, 2011, **24**(8): 116–118.  
尚宇, 徐婷, 何永辉. 分数阶傅里叶变换在心电信号处理中的应用[J]. *电子科技*, 2011, **24**(8): 116–118.
- [214] Jing X Y, Wong H S, Zhang D. Face recognition based on discriminant fractional Fourier feature extraction[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2006, **27**(13): 1465–1471.
- [215] Liu Z F, Lu X Y. Face recognition based on fractional Fourier transform and PCA[C]//*Proceedings of 2011 Cross Strait Quad-Regional Radio Science and Wireless Technology Conference*, 2011:1406–1409.
- [216] Xin Y, Bai X F, Li Q. Utilizing joint fractional Fourier transform correlator to fingerprint recognition[C]//*China Instrument and Control Society*, 2010.  
辛怡, 白雪菲, 李勤. 分数阶傅里叶联合变换相关在指纹识别中的应用[C]//中国仪器仪表学会医疗仪器分会 2010 两岸四地生物医学工程学术年会论文集, 2010.
- [217] Qian X H. Fractional Fourier transform and its application in whispered speaker identification[D]. Suzhou: Soochow University, 2012.  
钱晓红. 分数阶傅里叶变换在耳语音说话人识别研究中的应用[D]. 苏州: 苏州大学, 2012.
- [218] Song X, Wei Y. Fault diagnosis of broken rotor bar in asynchronous motor based on short-time fractional Fourier transform[J]. *Journal of Wuhan University of Science and Technology*, 2016, **39**(2): 145–149.  
宋秀, 尉宇. 基于短时分数阶傅里叶变换的异步电机转子断条故障诊断[J]. *武汉科技大学学报*, 2016, **39**(2): 145–149.
- [219] Lv Y P. Blind source separation of machine faults based on time-frequency analysis[D]. Zhengzhou: Zhengzhou University, 2009.  
吕亚平. 基于时频分析的机械故障盲源分离方法研究[D]. 郑州: 郑州大学, 2009.

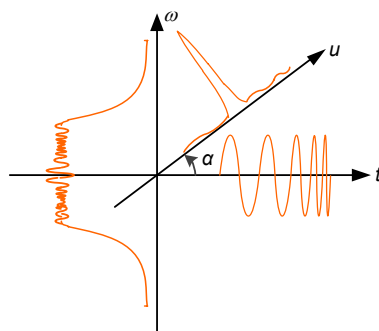
# Research progress in theories and applications of the fractional Fourier transform

Ma Jinming<sup>1,2</sup>, Miao Hongxia<sup>1,2</sup>, Su Xinhua<sup>1,2</sup>, Gao Chang<sup>1,2</sup>, Kang Xuejing<sup>3</sup>, Tao Ran<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>School of Information and Electronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

<sup>2</sup>Beijing Key Laboratory of Fractional Signals and Systems, Beijing 100081, China;

<sup>3</sup>Institute of Sensing Technology and Business, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China



Chirp signal in time, frequency, and fractional domain

**Overview:** The fractional Fourier transform (FRFT) is a generalization of the Fourier transform. It has been received much attention since Namias provided its definition in the perspective of eigendecomposition and its application in quantum in 1980. FRFT can be interpreted as decomposition of a signal into chirp signals or rotation of the time-frequency plane with angle  $\alpha$ . After years of research, the theoretical system of the FRFT has been relatively completed. Efficient and accurate discretization algorithms and sampling theorem associated with the FRFT make the digital signal processing based on discrete FRFT possible. Filtering and parameter estimation in fractional domains greatly promote applications of the FRFT in practice. Analysis of a signal in multiple fractional domains jointly distinguish signal processing utilizing FRFT from traditional signal processing, this is because with the rotation angle  $\alpha$  changing from 0 to  $\pi/2$ , the FRFT of a signal can provide characteristics of the signal in many fractional domains, including time domain and frequency domain. Meanwhile, with the development of theoretical research, the FRFT also shows great values in practice. In addition to traditional areas such as quantum and optical, FRFT has also been applied in the area of signal processing, especially in radar signal processing, communication signal processing, image processing, medical signal processing, biology signal processing, and mechanical signal processing, et al. In this paper, we first provide definitions of the FRFT and its basic properties. We then review recent developments of the FRFT in theory, including discretization algorithms of the FRFT, various discrete fractional transforms derived from the discrete FRFT, sampling theory associated with the FRFT, filtering and parameter estimation in fractional domains, and joint analysis in multiple fractional domains. We next summarize progress in several application areas utilizing FRFT, including radar, communication, image encryption, optical measurement, health care, biology, and instrument. We also provide several future research directions of the FRFT, for example, fast algorithm and sparse sampling associated with the FRFT can be studied further to reduce complexity, existing applications of the FRFT can be promoted to improve the system performance further, FRFT can also be applied to machine learning because FRFT can provide characteristic of images in multiple fractional domains, FRFT based on graph may be very useful in graph signal processing, and discrete FRFT based on quantum computation may greatly reduce the complexity. By summarizing the research history, presenting research focus, and discussing future research directions of the FRFT, we try to provide a relatively comprehensive overview to the research progress in the FRFT to help readers to understand this filed better.

**Citation:** Ma J M, Miao H X, Su X H, *et al.* Research progress in theories and applications of the fractional Fourier transform [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2018, 45(6): 170747

Supported by Key Program of National Natural Science Foundation of China, the Foundation for Innovation Research Groups of the National Natural Science Foundation of China, and the Youth Fund of the National Natural Science Foundation of China

\* E-mail: rantao@bit.edu.cn