



DOI: 10.12086/oe.2018.170738

## 线性正则变换的离散化研究进展

孙艳楠<sup>1,2</sup>, 李炳照<sup>1,2\*</sup>, 陶然<sup>3</sup><sup>1</sup>北京理工大学数学与统计学院, 北京 100081;<sup>2</sup>复杂信息数学表征分析与应用北京市重点实验室, 北京 100081;<sup>3</sup>北京理工大学信息与电子学院, 北京 100081

**摘要:** 线性正则变换(LCT)是 Fourier 变换和分数阶 Fourier 变换的广义形式。近年来研究成果表明, LCT 在光学、信号处理及应用数学等领域有广泛的应用, 而离散化成为了其得以应用的关键。由于 LCT 的离散算法不能简单直接地将时域变量和 LCT 域变量离散化得到, 因此 LCT 的离散算法成为近年来的研究重点。本文依据 LCT 的离散化发展历史, 对其重要研究进展和现状进行了系统归纳和简要评述, 并给出不同离散化算法之间的区别和联系, 指明了未来发展方向。这对研究者全面了解 LCT 离散化方法具有很好的参考价值, 可以进一步促进其工程应用。

**关键词:** 分数阶 Fourier 变换; 线性正则变换; 离散时间线性正则变换; 线性正则级数; 离散线性正则变换

**中图分类号:** O436.3

**文献标志码:** A

**引用格式:** 孙艳楠, 李炳照, 陶然. 线性正则变换的离散化研究进展[J]. 光电工程, 2018, 45(6): 170738

## Research progress on discretization of linear canonical transform

Sun Yannan<sup>1,2</sup>, Li Bingzhao<sup>1,2\*</sup>, Tao Ran<sup>3</sup><sup>1</sup>School of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;<sup>2</sup>Beijing Key Laboratory on MCAACI, Beijing 100081, China;<sup>3</sup>School of Information and Electronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

**Abstract:** Linear canonical transformation (LCT) is a generalization of the Fourier transform and fractional Fourier transform. The recent studies have shown that LCT is widely used in optics, signal processing and applied mathematics, and the discretization of the LCT becomes vital for the applications of LCT. Since the discretization of LCT cannot be obtained by directly sampling in time domain and LCT domain, the discretization of the LCT becomes the focus of investigation recently. Based on the development history of LCT discretization, a review of important research progress and current situation of discretization of the LCT is presented in this paper. Meanwhile, the connection among different discretization algorithms and the future development direction are given. It is of great reference value for researchers to fully understand the LCT discretization method and can further promote its engineering applications.

**Keywords:** fractional Fourier transform; linear canonical transform; discrete-time linear canonical transform; linear

收稿日期: 2017-12-13; 收到修改稿日期: 2018-03-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61671063); 国家自然科学基金创新研究群体基金资助项目(61421001)

作者简介: 孙艳楠(1987-), 女, 博士研究生, 主要从事分数阶 Fourier 变换、线性正则变换离散化与快速算法的研究。

E-mail: yuanansun@126.com

通信作者: 李炳照(1975-), 男, 博士, 教授, 主要从事小波变换、分数阶 Fourier 变换、线性正则变换的基本理论及其在非平稳信号分析与处理中应用的研究。E-mail: li\_bingzhao@bit.edu.cn

canonical series; discrete linear canonical transform

**Citation:** Sun Y N, Li B Z, Tao R. Research progress on discretization of linear canonical transform[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2018, 45(6): 170738

## 1 引言

线性正则变换(Linear canonical transform, LCT)是自由度为 3 的参数化线性积分变换。早在 20 世纪 70 年代墨西哥国立自治大学 Moshinsky 教授和美国俄亥俄州立大学 Collin 教授分别从光学和量子力学两个角度几乎同时提出了 LCT<sup>[1-2]</sup>。土耳其比尔肯大学的 Ozaktas 教授团队<sup>[3]</sup>详细介绍了 LCT 在光学中的发展历史,并且给出了 LCT 的性质。墨西哥国立自治大学 Wolf 教授在文献[4]中给出了信号  $x(t)$  关于参数矩阵  $A=[a,b;c,d]$  的 LCT 的一般定义:

$$L_x^A(u) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)K_A(u,t)dt, & b \neq 0 \\ \sqrt{d} \cdot \exp\left(i\frac{cd u^2}{2}\right)x(du), & b = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

这里  $a,b,c,d \in R$ ,  $ad - bc = 1$ ,

$$K_A(u,t) = \frac{1}{\sqrt{i2\pi b}} \exp\left[i\left(\frac{at^2}{2b} - \frac{ut}{b} + \frac{du^2}{2}\right)\right]$$

是 LCT 的变换核,

$$\frac{1}{\sqrt{ib}} = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \exp\left[-i\frac{\pi}{2}\left(\text{sgn}(b) + \frac{1}{2}\right)\right],$$

$\text{sgn}(\cdot)$  是符号函数,式(1)称为角频率意义下的 LCT。

通过变量代换  $t = \sqrt{2\pi}t$ ,  $u = \sqrt{2\pi}u$  可以得到与式(1)等价的另一个 LCT 的定义,称为频率意义下的 LCT,此时变换核为<sup>[3-4]</sup>

$$K_A(u,t) = \frac{1}{\sqrt{ib}} \exp\left[i2\pi\left(\frac{a}{2b}t^2 - \frac{u}{b}t + \frac{d}{2b}u^2\right)\right].$$

在一些情况下令  $\alpha = d/b$ ,  $\beta = 1/b$ ,  $\gamma = a/b$ , 用  $M = (\alpha, \beta, \gamma) \in R^3$  代替参数矩阵  $A = [a,b;c,d]$  定义三个参数的 LCT<sup>[3-4]</sup>:

$$\begin{cases} L_x^M(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_M(u,t)x(t)dt \\ C_M(u,t) = \sqrt{\beta} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\pi(\alpha t^2 - 2\beta t u + \gamma t^2)} \end{cases}, \quad (2)$$

参数  $a, b, c, d$  和  $\alpha, \beta, \gamma$  有如下关系:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ \beta & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ \beta & \beta \end{bmatrix}^{-1},$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d}{b} = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{b} + c \right), \\ \beta &= \frac{1}{b}, \\ \gamma &= \frac{a}{b} = \frac{1}{d} \left( \frac{1}{b} + c \right). \end{aligned}$$

这几种定义形式不同,但是相互之间可以相互转换。LCT 在  $L^2(R)$  内积的意义下具有酉性,即,逆线性正则变换(ILCT)的核是原 LCT 变换核的共轭转置,  $K_{A^{-1}}(t,u) = K_A^*(u,t)$ 。对不同变换参数连续做多次 LCT,相当于这些变换矩阵按照变换的次序相乘得到的矩阵作为变换参数单独做一次 LCT,这是 LCT 的可加性质。当参数取特殊值时,LCT 可退化为 Fourier 变换、分数阶 Fourier 变换、尺度变换、Chirp 乘积、Chirp 卷积等<sup>[1,3]</sup>。在很多文献中,线性正则变换又被称作为 ABCD 变换<sup>[5]</sup>、广义 Fresnel 变换<sup>[6]</sup>、扩展分数阶 Fourier 变换<sup>[7]</sup>等。

LCT 是一种仿射变换并且保持区域面积不变,线性坐标变换效应对波场的相位空间描述,例如 LCT 的 Wigner-ville 分布函数<sup>[8-9]</sup>。相对 Fourier 变换和分数阶 Fourier 变换具有 0 个和 1 个变换参数,LCT 具有 3 个自由参数,这使得在传统 Fourier 变换域和分数阶 Fourier 变换域非带限信号可能为某个参数下 LCT 域带限信号,这克服了一些理论对信号带限的限制。LCT 与分数阶 Fourier 变换在时频面上的旋转关系相比,不仅包括旋转关系,还包括压缩和拉伸等关系,因此 LCT 更加灵活,在光学,应用数学和信号处理领域具有强大的潜力。近年来,分数阶 Fourier 变换无论是在理论研究还是实际应用中都取得了很好的成果<sup>[3,10-20]</sup>。LCT 是分数阶 Fourier 变换的广义形式,其相关理论研究和应用也逐渐引起国内外研究人员的重视。在 1997 年,土耳其比尔肯大学的教授 Barshan 和 Ozaktas 团队在文献[21]中首先介绍了如何应用线性正则变换来进行最优滤波器设计。随后,从 2000 年起,台湾国立大学 Pei 教授团队先后探究了 LCT 的离散化方法<sup>[22-26]</sup>,特征值和特征向量<sup>[27-29]</sup>、二维 LCT<sup>[26,30-32]</sup>、解析信号的 LCT<sup>[33-34]</sup>等理论;在 2006 年,以色列本·古里安大学 Stern 教授团队首次研究了 LCT 域的采样问题<sup>[35-36]</sup>,这为 LCT 的采样理论研究提供了一种新思路。在此之

后,国内研究者北京理工大学陶然教授和李炳照教授、哈尔滨工业大学史军教授和西安电子科技大学魏德运教授等团队对 LCT 体系下的采样问题进行了深入的研究,并取得了很好的研究成果<sup>[37-41]</sup>。卷积定理是 Fourier 变换的重要基本定理之一,在 2006 年陶然教授团队首次提出了 LCT 域的卷积定理并将其应用于最优滤波器设计<sup>[42]</sup>。继而有关 LCT 的基本理论,如不确定性原理, LCT 与模糊函数以及 Winger-ville 分布的关系,最近十几年来也逐渐被提出<sup>[43-48]</sup>。结合这些基础理论, LCT 已经被广泛地应用在瞬时频率估计<sup>[49]</sup>、信号的检测与估计<sup>[50]</sup>、线性正则域滤波设计<sup>[51-52]</sup>、雷达系统<sup>[53]</sup>、图像处理<sup>[54]</sup>、语音信号分析<sup>[55]</sup>等方面。

从目前研究成果来看, LCT 基本理论正在不断完善。相比与 Fourier 变换和分数阶 Fourier 变换的基本理论,前者还有很多方面有待进一步研究,比如 LCT 的离散化与快速算法。为了使得 LCT 在信号处理和光学中得到很好的应用,必须对 LCT 的离散化方法和快速算法进行研究。在 1996 年, Ozaktas 教授团队首次提出了分数阶 Fourier 变换基于采样的离散分数阶 Fourier 变换的快速计算方法<sup>[56]</sup>。在这种算法的基础上, Pei 教授团队于 2000 年通过对时域和 LCT 域进行合适间隔的采样首次得到了离散 LCT(discrete linear canonical transform, DLCT)的闭合形式定义<sup>[22]</sup>。针对得到的 DLCT,利用算子分解的方法得到计算复杂度与 FFT 相当的快速算法,但是这种算法不具有 LCT 的可加性质。从此之后, LCT 的多种离散化方法和快速算法相继被研究者提出。例如,在 2005 年,爱尔兰都柏林大学 Sheridan 教授团队,基于快速 Fourier 变换算法(fast Fourier transform, FFT)思想,利用离散变换矩阵的性质,提出了具有酉性的基分解快速算法<sup>[57]</sup>。同年, Sheridan 教授团队根据 LCT 变换是 Fourier 变换、分数阶 Fourier 变换、尺度变换等广义形式,结合 LCT 变换的可加性质,提出了参数矩阵分解的快速算法<sup>[58]</sup>,这种算法能够很好地逼近连续 LCT,是 LCT 数值计算的有效方法。从此,基于 LCT 参数矩阵分解的算法得到了广泛关注,针对不同类型的信号和不同的参数矩阵分解形式,提出了各种各样的离散化和快速计算方法。目前,有关分数阶 Fourier 变换的离散化方法已给出一些综述文章,其提拱了丰富的相关文献资源,给出了三大类型分数阶 Fourier 变换的离散化算法,对于了解分数阶 Fourier 变换的离散化算法具有很好的参考价值<sup>[11,19,59-60]</sup>。然而,至今仍然没有关于 LCT 离散化

方法和快速算法的综述文献。基于此,本文对 LCT 离散化算法重要研究进展和现状进行了系统归纳和简要评述。

本文将从以下几个方面进行详细介绍和比较:第 2 部分,针对不同类型的信号研究线性正则变换级数(linear canonical transform series, LCS)和离散时间线性正则变换(discrete-time linear canonical transform, DTLCT)的有关定义;第 3 部分,研究直接离散 LCT 的不同定义;第 4 部分,研究不同分解基下 DLCT 的快速算法;第 5 部分,研究基于 LCT 参数矩阵分解的 LCT 快速算法;第 6 部分,研究 DLCT 的其他离散化与快速实现方法;第 7 部分,总结全文,探讨 LCT 离散化和快速算法的未来研究方向。

## 2 线性正则变换级数(LCS)和离散时间线性正则变换(DTLCT)

经典的 Fourier 变换体系中,针对信号是否连续是否周期,主要存在四种不同形式的 Fourier 变换对: Fourier 级数(FS),离散时间 Fourier 变换(DTLCT), Fourier 变换(FT),离散 Fourier(DFT),这四种变换对分别对应四种不同信号类型,即,连续周期信号,离散非周期信号,连续非周期信号,离散周期信号。对于每一种变换对都要考虑信号是否连续,是否周期。在 Fourier 变换对中,只有连续非周期信号和离散周期信号在时域和变换域才具有相同的形式。文献[61]提出了只有在时域和变换域具有相同形式的信号才可以定义分数阶 Fourier 变换,这也是分数阶 Fourier 变换具有可加性质的要求。分数阶 Fourier 变换是 LCT 的特殊形式,那么在 LCT 体系下,是否也同样存在相应的四种变换对及信号类型的限制。由于核函数关于时间变量  $t$  是 Chirp 周期的<sup>[61-62]</sup>,因此 Fourier 域的周期性性质将对应 LCT 域的 Chirp 周期性,上述的连续与周期性问题则转换为考虑信号是否连续,是否为 Chirp 周期的问题。文献[63]已对上述问题给予了详细的回答。针对信号的连续性、离散性和 Chirp 周期性,提出了 LCS 和 DTLCT。在给出 LCS 和 DTLCT 之前,首先,定义 Chirp 周期信号:

**定义 1** 设 LCT 的参数为  $M = (\alpha, \beta, \gamma)$ ,如对于某一常数  $T$  来说,信号  $x(t)$  满足:

$$x(t-T)\exp(i\pi\gamma(t-T)^2) = x(t)\exp(i\pi\gamma \cdot t^2), \quad (3)$$

则称信号  $x(t)$  是周期为  $T$  的 Chirp 周期信号<sup>[64]</sup>。

根据 Chirp 周期信号的定义,可以对任意信号

$x(t)$  和参数为  $M = (\alpha, \beta, \gamma) \in R^3$  的线性正则变换  $L_x^M(u)$  定义 Chirp 周期(或周期复制和相位调制信号)延拓信号<sup>[63]</sup> :

$$\bar{x}(t)_{(M^{-1}, B)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nB)e^{-in\gamma nB(2t-nB)}, \quad (4)$$

$$\bar{L}_x^M(u)_{(M, W)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_x^M(u-nW)e^{in\alpha nW(2u-nW)}, \quad (5)$$

这里  $B, W$  是任意常数。针对上述的 Chirp 周期信号, Ozaktas 等人<sup>[63]</sup>通过对输入信号进行采样以及正变换和逆变换的对偶关系, 得到 DTLCT 和 LCS, 其中 DTLCT 定义为

$$\bar{L}_x^M(u)_{(M, W)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t)e^{in[\alpha n^2 - 2\beta u(n\Delta t) + \gamma(n\Delta t)^2]}, \quad (6)$$

$$x(n\Delta t) = \int_{(-2\Delta t|\beta|)^{-1}}^{(2\Delta t|\beta|)^{-1}} \bar{L}_x^M(u)_{(M, W)} e^{-in[\alpha u^2 - 2\beta u(n\Delta t) + \gamma(n\Delta t)^2]} du, \quad (7)$$

式中:  $\Delta t$  是采样间隔,  $W = \frac{1}{\Delta t|\beta|}$ ,  $\bar{L}_x^M(u)_{(M, W)}$  满足参数矩阵  $M$  下 Chirp 周期性, 即:

$$\bar{L}_x^M\left(u - \frac{1}{\Delta t|\beta|}\right)_{(M, W)} e^{in\alpha\left(u - \frac{1}{\Delta t|\beta|}\right)^2} = \bar{L}_x^M(u)_{(M, W)} e^{in\alpha u^2}. \quad (8)$$

与这类 DTLCT 相对应的 LCS 定义为

$$\bar{x}(t)_{(M^{-1}, T)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{L}_x^M\left(\frac{n}{T|\beta|}\right) e^{-in\left[\alpha\frac{n}{T|\beta|} - 2\beta t\frac{n}{T|\beta|} + \gamma t^2\right]},$$

$$\bar{L}_x^M\left(\frac{n}{T|\beta|}\right)_{(M, T)} = \int_{-T/2}^{T/2} \bar{x}(t)_{(M^{-1}, T)} e^{-in\left[\alpha\frac{n}{T|\beta|} - 2\beta t\frac{n}{T|\beta|} + \gamma t^2\right]} dt, \quad (9)$$

这里  $T$  是信号  $\bar{x}(t)$  的 Chirp 周期。式(9)表明一个 Chirp 周期信号在任何 Chirp 周期内可以精确地展开为 LCS, 展开系数是信号  $x(t)$  的 LCT 在采样点  $n/(T|\beta|)$  的值。在实际应用中很多信号不是 Chirp 周期信号, 因此上述的精确相等关系只能是近似相等。针对非 Chirp 周期信号中的一类有限长信号, 西安电子科技大学魏德运等人<sup>[65-66]</sup>提出了 LCS, 其思想是将冲击函数  $\delta(u-nu_0)$  看作是 LCT 域的基函数, 对  $\delta(u-nu_0)$  做参数矩阵为  $M$  的逆 LCT, 同时考虑正交性条件, 得到参数矩阵  $M$  下 LCS 时域的正交基函数  $\Phi_n^M(t)$  :

$$\Phi_n^M(t) = \frac{\sqrt{-\beta}}{T\beta} e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-in\left[\alpha\left(\frac{n}{T\beta}\right)^2 - 2\beta t\frac{n}{T\beta} + \gamma t^2\right]},$$

其中:  $u_0 = 1/(T\beta)$ ,  $T$  为信号的长度, 利用基函数  $\Phi_n^M(t)$  对信号进行级数展开, 根据基函数的正交性, 得到有限长信号的展开系数。

设信号  $x(t)$  是定义在区间  $[-T/2, T/2]$  的有限长信号,  $T$  为常数, 则  $x(t)$  的 LCS 可以展开为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{M,n} \Phi_n^M(t). \quad (10)$$

LCS 的展开系数可以从信号  $x(t)$  的参数矩阵为  $M$  的 LCT 采样中得到:

$$C_{M,n} = \sqrt{\frac{1}{T\beta}} L_x^M\left(\frac{n}{T\beta}\right),$$

这与传统的 FS 对连续非周期信号在有限区间内展开是类似的。式(10)在信号  $x(t)$  定义区间内是成立的, 在给定的区间之外是这些信号的 Chirp 周期复制。利用 LCS 的对偶性得到了与式(10)相对应的 DTLCT<sup>[67]</sup>, 也即, 把时域的离散采样看作是参数  $M=(0,1,0)$  的 LCS 展开系数, 那么离散时间信号  $x(n\Delta t)$  的 DTLCT 可以看作是  $L_x^{[0,-1,0]}(u)$  在参数为  $M = (-\beta/\alpha, \gamma/\beta, \gamma/(\alpha\beta))$  时 LCS 的系数<sup>[67]</sup>。这种 DTLCT 是从 LCS 出发得到且在 LCT 域是离散的, 与文献<sup>[57,63,68]</sup>中定义的 DTLCT 不同。

LCS 是 FS 的推广, 类似于 FS, 在三角基函数下, 周期信号可以在任意周期内展开为 FS 的形式。相应的在 Chirp 基函数下, 如果一个信号是 Chirp 周期的, 那么这个信号在任意的 Chirp 周期内可以展开为 LCS。对于一般的信号, 可在有限区间内进行 LCS 展开, 在这种情况下, 展开形式在这个区间之外是信号的 Chirp 周期复制。

表 1 给出了对不同类型的信号在 LCT 体系下和 Fourier 体系下的比较。从表 1 中可以得到, 任意一个域的离散化必将会导致另外一个域的 Chirp 周期化。如果一个信号在一个域既是离散又是周期的, 那么另

表 1 不同类型信号的线性正则分析

Table 1 The linear canonical analysis of different types of signals

变换类型	时域	LCT 域	经典频域
LCT	连续	连续	连续(FT)
LCS	连续 Chirp 周期	离散非 Chirp 周期	离散非周期(FS)
DTLCT	离散非周期	连续 Chirp 周期	连续周期(DTFT)
DLCT	离散 Chirp 周期	离散 Chirp 周期	离散周期(DFT)

一个域也具有相应的性质，这是 DLCT 的特性。

类似于离散 Fourier(DFT)和离散分数阶 Fourier 变换(DFRFT),离散 LCT(DLCT)是使得 LCT 得以广泛应用的基础。在 LCT 被定义之后,有许多研究人员定义和研究了 DLCT 的离散化方法和快速算法,为了保证数值计算的结果与连续 LCT 变换一致,通常一个好的离散化方法要求 DLCT 同时具有以下尽可能多的性质:

- 1) 数值计算结果逼近连续变换;
- 2) 酉性,即  $(L_x^A)^H = L_x^{A^{-1}}$ , H 表示共轭转置;
- 3) 具有旋转相加性质,即  $L^A L_x^B = L_x^C$ , 这里

$C = AB$ ;

4) 当 A 取特殊值时,能够与现有的离散算法,如离散 Fourier 变换(DFT),离散分数 Fourier 变换(DFRFT)一致。

本文所提到的离散算法的前提是输入信号的时域和变换域都是近似带限的,那么首先定义带限信号:

**定义 2** 如果信号  $x(t)$  对于某一个常数  $W_0$ , 满足  $t \leq |W_0/2|$  时,  $x(t) \neq 0$ , 那么信号  $x(t)$  是时域带限的,  $W_0$  称为信号的时宽。

**定义 3** 如果信号  $x(t)$  对于某一个常数  $B_0$ , 满足  $u \leq |B_0/2|$  时,  $F(u) \neq 0$ , 那么信号  $x(t)$  是频域带限的, 这里  $F(u)$  是信号  $x(t)$  的 Fourier 变换,  $B_0$  称为信号的频宽。

**定义 4** 如果信号  $x(t)$  对于某一个常数  $B$ , 满足  $u \leq |B/2|$  时,  $L_x^{M/A}(u) \neq 0$ , 那么信号  $x(t)$  是参数  $M$  或者  $A$  的 LCT 域带限, 这里  $L_x^{M/A}(u)$  是信号  $x(t)$  的参数为  $M$  或者  $A$  是 LCT,  $B$  称为信号在 LCT 域的频宽。

众所周知,一个非零信号不可能在时域和变换域同时带限<sup>[69-70]</sup>,但是在实际应用中通常限定信号的时宽和带宽都是有限的,这种假设也是算法设计的误差来源之一。基于 1)~4)的要求,近些年来,研究者们提出了很多 DLCT 的定义和快速实现方法。因此,我们将从 DLCT 的提出到快速实现对 LCT 的算法进行详细概述。最简单的 DLCT 定义是将连续变换中的时间变量  $t$  和 LCT 域的变量  $u$  直接变换为  $n\Delta t$  和  $m\Delta u$ , 这里  $\Delta t$  和  $\Delta u$  分别是时域和 LCT 域的采样间隔,  $n$  和  $m$  为整数,这种离散化方法称为直接离散 LCT。

### 3 直接离散 LCT

直接离散 LCT 的方法有以下两种,第一,直接对积分变量中的  $t$  和  $u$  进行离散化,将积分转化为有限项求和;第二,利用冲击函数,对输入信号进行采样,

然后对采样得到的信号做 LCT,得到离散时间 LCT,进一步对 DTLCT 截取有限项,再结合采样定理对输出变量进行离散化,最后得到 DLCT;这两种离散化的方式不同,但是在一定条件下是相互等价的。Pei 教授团队和 Sheridan 教授团队分别利用这两种方式提出了以下 DLCT 的定义。为了区别他们的离散化方法,分别命名为 Pei 方法和 Sheridan 方法。

#### 3.1 Pei 方法

2000 年,Pei 等人<sup>[22]</sup>利用第一种方式首先得到了如下 DLCT:

$$X^A(m\Delta u) = \sqrt{\frac{1}{i2\pi b}} \Delta t \cdot \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} e^{i\left[\frac{d}{2b}(m\Delta u)^2 + \frac{a}{2b}(n\Delta t)^2 - \frac{1}{b}mn\Delta u\Delta t\right]} x(n\Delta t), \quad (11)$$

这里  $\Delta t$  与  $\Delta u$  是时域变量  $t$  和 LCT 域变量  $u$  的采样间隔,  $m = -M/2, -M/2+1, \dots, M/2-1$ ,  $N$  和  $M$  分别是时域和 LCT 域的采样点数。当  $M \geq N$  时,利用 DLCT 的变换核矩阵的共轭转置是逆变换的离散变换核矩阵,得到当采样间隔  $\Delta t$  与  $\Delta u$  满足式(12)时:

$$\Delta t \Delta u = \frac{2\pi |b|}{M}, \quad (12)$$

式(11)具有酉性。通过对变换矩阵进行归一化,得到具有酉性和可逆性的 DLCT:

$$X^A(m\Delta u) = \sqrt{\frac{1}{M}} \cdot \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} e^{i\left[\frac{d}{2b}(m\Delta u)^2 + \frac{a}{2b}(n\Delta t)^2 - \frac{2\pi mn \operatorname{sgn}(b)}{M}\right]} x(n\Delta t), \quad (13)$$

这里  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  是符号函数,即

$$\operatorname{sgn}(b) = \begin{cases} 1, & b > 0 \\ -1, & b < 0 \end{cases}. \quad (14)$$

相应的逆离散线性正则变换为

$$x(n\Delta t) = \sqrt{\frac{1}{M}} \cdot \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} e^{-i\left[\frac{a}{2b}(n\Delta t)^2 + \frac{d}{2b}(m\Delta u)^2 - \frac{2\pi mn \operatorname{sgn}(b)}{M}\right]} X^A(m\Delta u), \quad (15)$$

当  $M=N$  取  $A=[0,1;-1,0]$  时,式(13)和式(15)是经典的 DFT 变换对。文献[36,68]提到的 DLCT 都是这里定义的 DLCT 特殊情况。

此外,当  $b=0$  时,式(13)定义的 DLCT 将不成立。针对这种情况,Pei 等人<sup>[22]</sup>基于变换指标  $n$  和  $m$  必须是整数的要求,将离散定义分为  $d$  是整数和  $d$  为非整数两种情况给出了 DLCT 的定义。针对  $d$  是整数的情况,直接将变量  $u$  离散得到:

$$L_x^A(m\Delta u) = \sqrt{d} e^{i \frac{cd(m\Delta u)^2}{2}} x(dm\Delta u) \quad (16)$$

针对  $d$  是非整数的情况, 将利用 LCT 参数矩阵分解来得到离散形式, 这部分将在后面的 5.4 节给予详细的分析和讨论。

这类 DLCT 要求信号时域和频域带限, 时宽为  $W$ , 频宽为  $B_0$ , 即:

$$\int_{-W/2}^{+W/2} |x(t)| dt \cdot \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt} \approx 1$$

其中  $W = N\Delta t$ 。为了使 DLCT 能够逼近连续 LCT, 采样间隔要满足采样定理保证采样的充分性, 即:

$$\frac{1}{\Delta t} > B_0 + \left| \frac{a}{b} \right| \cdot W$$

在这类算法提出之后, Sheridan 等人利用第二种方式提出了如下 DLCT。

### 3.2 Sheridan 方法

在 2005 年, Hennelly 等人<sup>[57]</sup>通过对输入信号  $x(t)$  利用冲击串  $\delta_{\Delta t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t)$  进行采样, 得到采样信号  $x_s(t)$ , 即:

$$x_s(t) = x(t)\delta_{\Delta t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - n\Delta t) \quad (17)$$

然后对  $x_s(t)$  做参数为  $M = (\alpha, \beta, \gamma)$  的 LCT, 得到离散时间 LCT 式(6), 通过对离散时间截取足够大的  $N$ , 再对 LCT 域变量  $u$  进行采样间隔为  $\Delta u = 1/(\Delta t N |\beta|)$  的采样(不防令  $\beta > 0$ ), 得到 DLCT:

$$X^M(m\Delta u) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x(n\Delta t) \cdot e^{i\pi[\alpha(m\Delta u)^2 - 2\beta(m\Delta u)(n\Delta t) + \gamma(n\Delta t)^2]} \quad (18)$$

其中  $-N/2 \leq m \leq N/2 - 1$ , 离散变换核为

$$W_N^{n,m} = e^{i\pi \left[ \alpha \left( \frac{m}{N\Delta t\beta} \right)^2 - \frac{2mn}{N} + \gamma(n\Delta t)^2 \right]} \quad (19)$$

这里忽略了系数  $\sqrt{\beta} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ , 其对算法的推导没有影响。

当  $M=N$  时, 文献[22]和文献[57]两种 DLCT 的定义从本质上来说是等价的, 都要求采样间隔满足  $\Delta t\Delta u = 2\pi|\beta|/N$  或  $\Delta t\Delta u = 1/(N|\beta|)$ , 算法在 LCT 参数取特殊情况时, 可以退化为特殊的离散变换。这两种 DLCT 都需要选择合适采样点数  $N$ , 时域采样间隔  $\Delta t$ 、LCT 域采样间隔  $\Delta u$ , 使离散变换的结果能够很好地逼近连续变换同时保持酉性。对以上参数选择的方法在文献[36,63]中给出了详细介绍。文献[71]从数学角度给出了当 LCT 域采样间隔是 Ding 采样间隔  $2\pi|\beta|/(N\Delta t)$  的  $q$  倍( $q$  与采样点数  $N$  互质)时, DLCT 都具有酉性<sup>[72]</sup>。酉性在工程中也极其重要, 如相位调

制, 因此, 文献[71]的结论对定义 DLCT 将非常有用。后来, Sheridan 等团队为了克服文献[57]中 DLCT 定义的限制, 提出了如下改进的 DLCT。

### 3.3 改进的 DLCT

在文献[57]中给出的 DLCT, 输出范围与离散变换点数  $N$ , 时域的采样间隔  $\Delta t$  以及变换参数  $\beta$  有关。这里  $\beta$  是任意, 无法先设定, 那么对于给定的  $N$ , 必须通过改变  $\Delta t$  来改变输出的频率范围。这两个要求限定了必须给定以下三个变量中的两个才能有效进行离散化, 即输入范围, 输出范围, 采样频率。为了克服这些限制, 在文献[73]中提出了以下三种改进的 DLCT:

#### 1) 尺度保持的 DLCT

$$X^M(m\Delta t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x(n\Delta t) \cdot e^{i\pi[\alpha(m\Delta t)^2 - 2\beta(m\Delta t)(n\Delta t) + \gamma(n\Delta t)^2]} \quad (20)$$

根据采样定理<sup>[35]</sup>, 这里  $\Delta u = \Delta t = 1/(B|\beta|)$ , 其中  $B$  是输入信号的 LCT 域关于参数  $M$  的带宽; 采样点数  $N=W/\Delta t$ ,  $W$  是信号的时宽。这个算法实现时, 必须首先根据文献[35]中的推论 2, 确定时域的采样间隔  $\Delta t$ , 然后确定采样点数  $N$ 。利用这种算法可以得到区间  $[-N\Delta t/2, N\Delta t/2]$  内 LCT 域的频谱, 但是无法观测更大区间的 LCT 频谱。基于这个限制, 通过引入一个自由变量  $s$ , 提出了任意尺度扩展的 DLCT。

#### 2) 尺度变化的 DLCT

$$X^M(m\Delta t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x(n\Delta t) \cdot e^{i\pi[\alpha(sm\Delta t)^2 - 2\beta(sm\Delta t)(n\Delta t) + \gamma(n\Delta t)^2]} \quad (21)$$

这里  $-N/2 \leq m \leq N/2 - 1$ 。该算法输出的范围为  $[-sN\Delta t/2, sN\Delta t/2]$ 。该定义实质是 Pei 定义的 DLCT<sup>[22]</sup>。只是这里的引入参数  $s$  更加直观, 可以通过选择参数  $s$  改变输出的范围。当采样点数  $N$  一定时, 可以根据需要适当选择缩放因子  $s$  来扩大和缩小 LCT 域的频谱。由于采样间隔受采样定理的限制, 因此, 需要根据 LCT 对信号 Wigner-Ville 分布(WVD)的影响, 考虑插值或抽取运算来满足采样的条件。这样会给算法带来插值误差, 那么为了克服这一问题, 文献[73]提出了另外一个更加灵活的 DLCT, 即任意尺度的 DLCT。

#### 3) 任意尺度的 DLCT

这类 DLCT 定义输出点数  $M \neq N$ , 即:

$$X^M(m\Delta t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x(n\Delta t) \cdot e^{i\pi[\alpha(sm\Delta t)^2 - 2\beta(sm\Delta t)(n\Delta t) + \gamma(n\Delta t)^2]} \quad (22)$$

这里  $-M/2 \leq m \leq M/2 - 1$ , LCT 域的范围为  $[-sM\Delta t/2, sM\Delta t/2]$ , 算法不需要对信号进行插值运算。

针对上面的 DLCT, 直接求和计算需要  $O(NM)$  次复数算术运算, 其中一次算术运算包括一次复数乘法和一次复数加法。高效算法的引入可以使计算复杂度大大降低。这些降低计算复杂度的算法统称为快速 DLCT。一般来说, 快速算法能够将  $N$  点 DLCT 的计算复杂度降到  $O(N \log N)$ 。其优点还包括: 减小了存储需求、降低了由于有限位运算(乘/除和加/减在实际中都是以有限字长实现的)引起的计算误差。接下来将分别介绍现有的快速 DLCT 算法。

### 4 基分解的快速 DLCT

在式(18)定义的 DLCT 基础上, 将  $N$  点 DLCT, 转化为多个短序列的 DLCT, 利用这些短序列的 DLCT, 通过迭代算法实现  $N$  点快速运算, 这样的算法称为基分解快速 DLCT。经典 DFT 已经有很多快速实现方法, 例如基 2 时间抽取, 基 2 频域抽取和分裂基 FFT 算法等。最近十几年, 基于 FFT 的思想利用 LCT 的时移和频移性质、Chirp 周期性性质、离散变换核的对称性质, 提出了一些基分解的快速 DLCT 算法 [57,74-77]。离散序列的 LCT 时域和频移性质如下:

**性质 1** 连续信号  $x(t)$  以采样间隔为  $\Delta t$  离散化以后, 得到序列  $x(n\Delta t)$ , 离散序列  $x(n\Delta t)$  的 DTLCT 式 (6) 具有如下时间移位和调制性质:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x((n-l)\Delta t) \cdot e^{i\pi[ca^2-2\beta u(n\Delta t)+\gamma(n\Delta t)^2]} = e^{i\pi\gamma(l\Delta t)^2 \left(\gamma - \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2}\right)} \cdot e^{-i\pi l\Delta t u \left(\frac{\gamma\alpha}{\beta} - \beta\right)} \tilde{L}_x^M \left(u - \frac{\gamma l\Delta t}{\beta}\right), \quad (23)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n\Delta t) \cdot e^{i\pi 2\xi(n\Delta t)}] \cdot e^{i\pi[ca^2-2\beta u(n\Delta t)+\gamma(n\Delta t)^2]} = e^{i\pi\frac{\alpha\xi}{\beta} \left(2u - \frac{\xi}{\beta}\right)} \cdot \tilde{L}_x^M \left(u - \frac{\xi}{\beta}\right). \quad (24)$$

**性质 2** 式(18)定义的 DLCT, 离散变换核  $W_N^{n,m}$  具有以下性质:

$$W_N^{n,pm} = W_{N/p}^{n,m}, \quad (25)$$

$$W_N^{pn+x,m} = v(p,x) W_{p/N}^{n,m}, \quad (26)$$

其中:

$$v(p,x) = e^{i\pi \left[ \alpha(1-p^2) \left(\frac{m}{N\Delta t\beta}\right)^2 - \frac{2mx}{N} + \gamma(\Delta t)^2 ((pn+x)^2 - n^2) \right]}. \quad (27)$$

这些性质对推导 DLCT 基分解快速算法非常重要。

为了使  $W_N^{n,m}$  具有对称性质, 引入中间变量  $h$ , 满足  $\Delta t = h/\sqrt{N}$ , 那么  $W_N^{n,m}$  转化为

$$W_{N,h}^{n,m} = e^{i\pi \left[ \frac{\alpha}{N} \left(\frac{m}{h|\beta|}\right)^2 - \frac{2mn + \gamma(nh)^2}{N} \right]}. \quad (28)$$

$W_{N,h}^{n,m}$  具有以下性质:

$$1) \quad W_{N,h}^{2n,2m} = W_{N/4,h}^{n,m}; \quad (29)$$

$$2) \quad W_{N,h}^{n+\xi,m} = \mu_0^N(\xi,n) \mu^N(\xi) \mu_1^N(\xi,m) W_{N,h}^{n,m}, \quad (30)$$

其中:

$$\mu_0^N(\xi,n) = e^{i\pi\gamma\cdot h^2 \frac{2n\xi}{N}}, \quad \mu^N(\xi) = e^{i\pi\gamma\cdot h^2 \frac{\xi^2}{N}},$$

$$\mu_1^N(\xi,m) = e^{-i\frac{2\pi m\xi}{N}};$$

$$3) \quad W_{N,h}^{n,m+\eta} = \mu_2^N(\eta,m) \mu_3^N(\eta,n) W_{N,h}^{n,m}, \quad (31)$$

其中:

$$\mu_2^N(\eta,m) = e^{i\pi\frac{\alpha}{N} \frac{2m\eta}{(h\beta)^2}} e^{i\pi\frac{\alpha}{N} \left(\frac{\eta}{h\beta}\right)^2},$$

$$\mu_3^N(\eta,n) = e^{-i\frac{2\pi n\eta}{N}};$$

4)

$$W_{N,h}^{(n+\xi),(m+\eta)} = \mu_2^N(\eta,m) \mu_3^N(\eta,n+\xi) \cdot \mu_0^N(\xi,n) \mu^N(\xi) \mu_1^N(\xi,m) W_{N,h}^{n,m}. \quad (32)$$

充分利用以上性质, 将基分解的 DLCT 算法分为频率抽取算法, 时域抽取算法, 时域和频域同时抽取算法。

#### 4.1 频率抽取算法

文献[75]首先提出了基 2 频率抽取算法。该算法将  $N$  点输入序列分解为前半部分与后半部, 转化为如下 DLCT:

$$X^M(m\Delta u) = \sum_{n=-N/2}^{-1} \left\{ x(n\Delta t) W_{N,h}^{n,m} + x \left[ \left( n + \frac{N}{2} \right) \Delta t \right] W_{N,h}^{n+N/2,m} \right\}, \quad (33)$$

其中  $-N/2 \leq m \leq N/2 - 1$ 。利用式(25)和式(30), 得到:

$$X^M(m\Delta u) = \sum_{n=-N/2}^{-1} \left\{ x(n\Delta t) + x \left[ \left( n + \frac{N}{2} \right) \Delta t \right] \cdot \mu_0^N \left( \frac{N}{2}, n \right) \mu^N \left( \frac{N}{2} \right) \mu_1^N \left( \frac{N}{2}, m \right) \right\} W_{N,h}^{n,m}, \quad (34)$$

然后将  $m$  分为偶数和奇数情况, 式(34)简化为

$$X^M(2m\Delta u) = \sum_{n=-N/2}^{-1} \left\{ x(n\Delta t) + x \left[ \left( n + \frac{N}{2} \right) \Delta t \right] \cdot \mu_0^N \left( \frac{N}{2}, n \right) \mu^N \left( \frac{N}{2} \right) \right\} W_{N/2}^{n,m}, \quad (35)$$

$$X^M((2m+1)\Delta u) = \mu_2^{N/2} \left( \frac{1}{2}, m \right) \sum_{n=-N/2}^{-1} \mu_3^{N/2} \left( \frac{1}{2}, n \right) \left\{ x(n\Delta t) + x \left[ \left( n + \frac{N}{2} \right) \Delta t \right] \mu_0^N \left( \frac{N}{2}, n \right) \mu^N \left( \frac{N}{2} \right) \right\} W_{N/2}^{n,m+\frac{1}{2}}. \quad (36)$$

那么  $N$  点 DLCT 可以通过式(35)和式(36)转化为两个  $N/2$  点 DLCT 实现, 这一算法本身可以节省部分算术运算, 而更多的节省来自于将  $N/2$  点序列不断的重复分解直到分解为 2 点序列为止。在输入信号的长度为  $N=2^n$  时, 算法具有高的计算效率, 相应的计算复杂度为  $O(N \log N)$ 。

当数据长度  $N = 3^q$  时, 文献[75]利用相同的思想提出了基 3 频域抽取算法, 首先将  $N$  点的序列分解为长度为  $N/3$  点的离散序列(即前  $N/3$  个点, 中间  $N/3$  点以及后  $N/3$ ) :

$$\begin{aligned} x_j(n\Delta t) &= x(n + jN/r), \\ -N/2 \leq n \leq -(N(r-1)/2r) - 1, \\ j &= 0, 1, 2, \dots, r-1, \end{aligned}$$

然后频域  $m$  分解为  $3m + j$ ,  $-N/6 \leq m \leq N/6 - 1$ ,  $j = 0, 1, 2$ , 不断重复这种分解最后得到计算复杂度为  $O(N \log N)$  的快速算法。为了使分解基长度更加的灵活, 文献[77]进一步提出了一般基频域抽取算法, 当输入数据长度  $N = sr$  时, 首先将数据分解为  $r$  个长度为  $s$  的短数据, 相应的  $m$  分解为  $r$  个长度为  $s$  的序列, 即为  $rm + j$ ,  $-N/2r \leq m \leq (N/2r) - 1$  这就把一个长度为  $N$  的 DLCT 分解为  $r$  个长度为  $s$  的短序列 DLCT 计算。利用这种分解方法可以实现基为素数的 DLCT 快速计算, 并且可以根据实际的需要来选择分裂基的长度, 这里对输入数据的长度  $N$  要求仅为任意的合数, 分裂基的长度是  $N$  的因子。因此, 一般基频域抽取算法更加灵活。

从算法的分解来看, 在分解过程中输入信号都是顺序输入的, 但是输出的顺序是按一定间隔抽取的。相反, 针对输出是顺序的, 输入将按照一定规律抽取, 这样的算法称为时间域抽取算法。

#### 4.2 时间域抽取算法

文献[74]提出了基 2 时间抽取算法, 首先将输入的  $N$  点离散序列分解为长度为  $N/2$  点两部分序列, 一部分是包含偶数离散点  $x(2n\Delta t)$ , 一部分包含奇数离散点  $x((2n+1)\Delta t)$ ,  $-N/4 \leq n \leq N/4 - 1$ , 即:

$$\begin{aligned} X^M(m\Delta u) &= \sum_{n=-N/4}^{N/4-1} \{x(2n\Delta t)v(2,0) \\ &+ x[(2n+1)\Delta t]v(2,1)\} W_{N/2}^{n,m}, \end{aligned} \quad (37)$$

这里用到了式(26),  $v(\cdot)$  见定义式(27)。然后将频率变量分解为前半部分与后半部分, 得到两个长度为  $N/2$  的 DLCT :

$$X^M(m\Delta u) = \sum_{n=-N/4}^{N/4-1} \{x(2n\Delta t)v(2,0)$$

$$\begin{aligned} &+ x[(2n+1)\Delta t]v(2,1)\} W_{N/2}^{n,m}, \\ X^M((m + \frac{N}{2})\Delta u) &= \sum_{n=-N/4}^{(N/4)-1} \{x(2n\Delta t)v(2,0) \\ &+ x[(2n+1)\Delta t]v(2,1)\} \cdot e^{i\pi\alpha \frac{4m+N}{N(\Delta t\beta)^2}} W_{N/2}^{n,m}, \end{aligned} \quad (38)$$

这里  $-N/2 \leq m \leq -1$ 。因此, 可以利用两个  $N/2$  点的 DLCT 得到长度为  $N$  点的 DLCT。同样, 可以将  $N/2$  点的序列反复分解与迭代直到分解为 2 点 DLCT。为了改善时间抽取基长度的灵活性, 文献[76]进一步提出了一般基的时间抽取算法。这与频率抽取算法类似, 可以根据需要来选择基的长度, 这里对输入数据长度要求为合数, 即  $N = sr$ , 可以适当选择  $s$  和  $r$  的大小来选择合适的基。

#### 4.3 时间和频率同时抽取算法

自然的, 可以结合时间和频率同时抽取来进一步得到离散算法。文献[57]利用时域和频域同时抽取提出了基 4 快速 LCT。该算法首现将  $N$  点的序列分解为长度为前半部分和后半部分长度为  $N/2$  的序列, 即式(33), 然后再将分解后得到的序列和频率同时分解为包含偶数点和奇数点两部分, 这样输入的序列被分解为长度为  $N/4$  的 DLCT, 即得到如下算法:

$$\begin{aligned} X^M(2m\Delta t) &= A(m) + \mu^{N/4} \left(\frac{1}{2}\right) \mu_1^{N/4} \left(\frac{1}{2}, m\right) B(m), \\ X^M((2m+1)\Delta t) &= \mu_2^{N/4} \left(\frac{1}{2}, m\right) C(m) \\ &+ \mu_2^{N/4} \left(\frac{1}{2}, m\right) \mu^{N/4} \left(\frac{1}{2}\right) \mu_1^{N/4} \left(\frac{1}{2}, m\right) D(m), \end{aligned} \quad (39)$$

其中:  $-N/4 \leq m \leq N/4 - 1$ ,

$$\begin{aligned} A(m) &= \sum_{n=-N/4}^{-1} \left\{ x(2n\Delta t) + x\left[\left(2n + \frac{N}{2}\right)\Delta t\right] \right. \\ &\cdot \mu_0^N \left(\frac{N}{2}, 2n\right) \mu^N \left(\frac{N}{2}\right) \left. \right\} W_{N/4,h}^{n,m}, \\ B(m) &= \sum_{n=-N/4}^{-1} \mu_0^{N/4} \left(\frac{1}{2}, n\right) \{x((2n+1)\Delta t) \\ &+ x\left[\left(2n+1 + \frac{N}{2}\right)\Delta t\right] \mu_0^N \left(\frac{N}{2}, 2n+1\right) \mu^N \left(\frac{N}{2}\right)\} W_{N/4,h}^{n,m}, \\ C(m) &= \sum_{n=-N/4}^{-1} \left\{ x(2n\Delta t) - x\left[\left(2n + \frac{N}{2}\right)\Delta t\right] \right. \\ &\cdot \mu_0^N \left(\frac{N}{2}, 2n\right) \mu^N \left(\frac{N}{2}\right) \mu_3^{N/4} \left(\frac{1}{2}, n\right) \left. \right\} W_{N/4,h}^{n,m}, \\ D(m) &= \sum_{n=-N/4}^{-1} \mu_0^{N/4} \left(\frac{1}{2}, n\right) \mu_3^{N/4} \left(\frac{1}{2}, \frac{2n+1}{2}\right) \{x((2n+1)\Delta t) \\ &- x\left[\left(2n+1 + \frac{N}{2}\right)\Delta t\right] \mu_0^N \left(\frac{N}{2}, 2n+1\right) \mu^N \left(\frac{N}{2}\right)\} W_{N/4,h}^{n,m}. \end{aligned}$$



利用 Chirp 周期性质式(8), 将式(39)转化到  $-N/8 \leq m \leq N/8$  内进行迭代计算, 进而通过计算两个短序列 DLCT 得到原  $N$  点序列 DLCT。进一步将  $N/4$  点的序列分解为两个  $N/16$  点的序列, 然后通过计算两个  $N/16$  点序列的 DLCT 得到原来  $N/4$  点序列的 DLCT, 重复这一过程直到分解为 4 点或者 2 点序列为止。这个算法称为是 DLCT 基 4 分解的快速实现方法, 要求输入信号的长度为  $2^q$ ,  $q$  是任意的正整数, 算法的计算复杂度  $O(N \log N)$ , 并且具有好的可逆性和酉性。

基于这些分解算法结合文献[78-79]所提算法, 文献[74]提出了基 2 时间/频率分解和基 4 分解算法。这个算法具有较少数目的加法和乘法, 但是目前对 DLCT 基分解的实现还没有最优选择方法。基分解的 DLCT 快速算法是仅仅利用 LCT 的一些性质来高效率地实现 DLCT 的计算。另外, 在很多文献中利用 LCT 的可加性结合已有的 LCT 特殊情况的算法给出了算子分解的算法。

## 5 算子分解的 DLCT

通过 LCT 的可加性, 将 LCT 算子分解为具有快速算法的特殊算子(Fourier 算子、分数阶 Fourier 算子、Fresnel 算子、Chirp 乘积、尺度变换算子等)的乘积, 进而得到 LCT 快速算法, 这种类型的算法称为算子分解的 DLCT。此类算法重点在于考虑分解过程中采样的充分性, 保证离散点能够很好地恢复连续变换。在这个过程中采样率和采样点数的确定是算法的关键。采样率可以根据 Nyquist-Shannon 或者 LCT 域采样定理确定; 而离散点恢复连续变换的最少采样点数等于信号的时宽带宽乘积<sup>[80]</sup>, 因此, 在离散化之前必须选择合适的时宽和带宽使其包含信号绝大部分能量。Wigner-Ville 分布是一种双线性时频工具<sup>[46]</sup>, 其实质是反映信号能量在时频平面内的分布。经典的 FT 对信号 WVD 的影响表现为时频平面旋转  $\pi/2$  角度, 而分数阶 Fourier 变换对信号 WVD 的影响是时频平面任意角度的旋转。不同的变换对信号 WVD 有不同的影响, 因此会影响变换前后信号的时宽和带宽。根据 LCT 与信号 WVD 的关系, 以及在分解过程中特殊算子对 WVD 的影响, 确定变换后信号时频带宽乘积(signal bandwidth product, SBP), 根据变换前后 SBP 的关系确定插值或者抽取的倍数, 那么 SBP 的确定将是算法的又一关键点。首先给出 LCT 与 WVD 的关系。

### 5.1 LCT 与 Wigner-Ville 分布

信号  $x(t) \in L^2(R)$  的 Wigner-ville 分布(Wigner-Ville distribution, WVD)定义为<sup>[60,81-83]</sup>

$$D_{WVx}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi\omega\tau} d\tau$$

$$D_{WVu}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F\left(t + \frac{\tau}{2}\right) F^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{i2\omega\tau} d\tau, \quad (40)$$

其中  $F(\cdot)$  是信号  $x(t)$  的 Fourier 变换。Wigner-Ville 分布与 LCT 存在密切的联系, 即一个信号 LCT 的 Wigner-Ville 分布是原信号 Wigner-Ville 分布坐标的仿射变换<sup>[44-46,84-85]</sup>, 也就是说, 若  $L_x^A(u)$  是信号  $x(t)$  的 LCT, 则  $L_x^A(u)$  与原信号  $x(t)$  的 WVD 有如下关系:

$$D_{WVL_x^A}(u, v) = D_{WVx}(du - bv, -cu + av),$$

$$D_{WVx}(u, v) = D_{WVL_x^A}(au + bv, cu + dv)。$$

当变换参数  $a, b, c, d$  取特殊情况时, 上式退化为相应特殊变换对信号 WVD 的影响, 如:

#### 1) Scaling(尺度变换)

$$L_x^A(u) = \sqrt{\frac{1}{S}} f\left(\frac{u}{S}\right), \quad (41)$$

$$A = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & \frac{1}{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}^{-1}。$$

此变换对信号 WVD 影响:

$$D_{WVL_x^A}(u, v) = D_{WVx}\left(\frac{u}{S}, Sv\right), \quad (42)$$

这里  $S > 0$  称为尺度变换因子。

#### 2) Fourier 变换(FT)

$$L_x^A(u) = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) F(u), \quad (43)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}。$$

FT 变换对信号的 WVD 影响:

$$D_{WVL_x^A}(u, v) = D_{WVx}(-v, u), \quad (44)$$

相当于时频面顺时针旋转  $\pi/2$ 。

#### 3) Chirp 乘积(Chirp multiply, CM)

$$L_x^A(u) = \exp(-i\pi \cdot qu^2) \cdot x(u), \quad (45)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix}^{-1}。 \quad (46)$$

CM 对信号 WVD 的影响:

$$D_{WVL_x^A}(u, v) = D_{WVx}(u, v + qu)。 \quad (47)$$

#### 4) Chirp 卷积(Chirp convolution, CC)

$$L_x^A(u) = f(u) * \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{r}} \cdot \exp\left(i\frac{\pi u^2}{r}\right), \quad (48)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

它对信号 WVD 的影响：

$$D_{WV L_x^A}(u, v) = D_{WV x}(u - rv, v). \quad (49)$$

5) 分数阶 Fourier 变换(FRFT)

信号  $x(t)$  的  $a$  阶分数阶 Fourier 变换<sup>[3,11,56,59,86-90]</sup> 定义为

$$L_x^A = F^a(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K_a(u, t)x(t)dt, \quad (50)$$

$$K_a(u, t) = \begin{cases} \sqrt{1 - i \cot \theta} \cdot e^{i\pi(u^2 \cot \theta - 2ut \csc \theta + t^2 \cot \theta)}, & a \neq 2k \\ \delta(u - t), & a = 4k \\ \delta(u + t), & a = 4k \pm 2 \end{cases},$$

这里  $k$  是任意的整数， $\theta = a\pi/2$ ，

$$A = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{a\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{a\pi}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{a\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{a\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{a\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{a\pi}{2}\right) \end{bmatrix}^{-1}.$$

FRFT 对信号 WVD 的影响：

$$D_{WV L_x^A}(u, v) = D_{WV x} \left[ u \cos\left(\frac{a\pi}{2}\right) - v \sin\left(\frac{a\pi}{2}\right), \right. \\ \left. u \sin\left(\frac{a\pi}{2}\right) + v \cos\left(\frac{a\pi}{2}\right) \right]. \quad (51)$$

图 1 给出了原信号的 WVD 是矩形区域时，经过一些特殊变换之后信号的 WVD。从图 1 可以得出变换前后信号的时宽和带宽将会发生变化，从而会影响信号的时宽带宽乘积。在文献[58,91]中给出了经过 LCT 变换之后信号时宽带宽积(signal wide bandwidth product, SBP)一般计算方法。下面将根据信号的时频区域是否为矩形，以及采样率是否在 Nyquist-Shannon 意义下确定，详细概述已有的快速 LCT 算法。

5.2 时频是任何形状的矩阵分解算法

文献[58]利用线性代数矩阵相乘的方法，对于时频平面为任意形状的信号，研究了信号通过一个光学系统以后 SBP 的计算方法。假设信号的能量集中在时频平面的任意多边形内(这里令为四边形，如图 2(a)，四边形的四个顶点坐标为  $(t_1, u_1)$ ， $(t_2, u_2)$ ， $(t_3, u_3)$  和  $(t_4, u_4)$ ，定义坐标矩阵：

$$S = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix}, \quad (52)$$

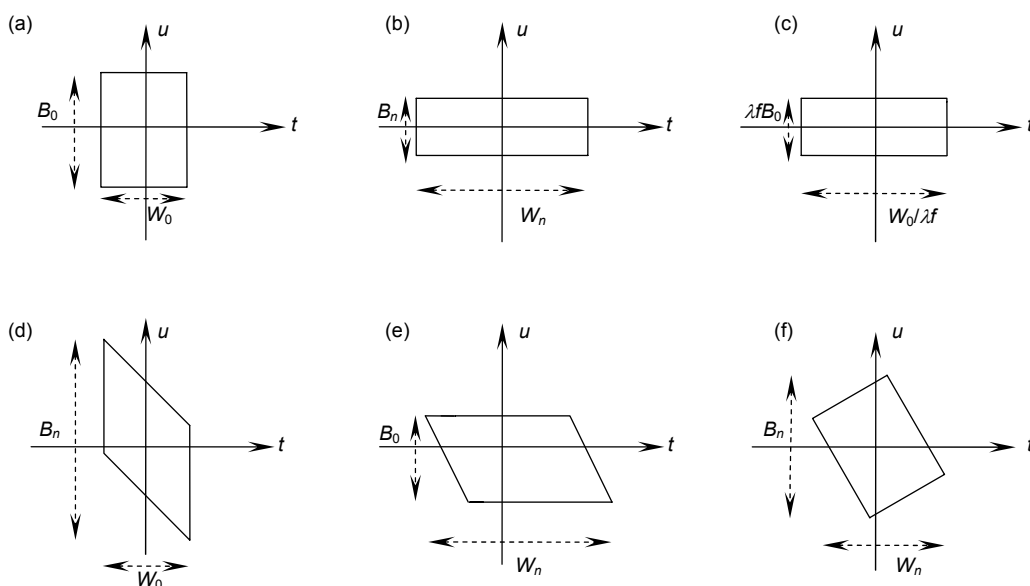


图 1 一些变换对信号 WVD 影响。(a) 原信号的 WVD; (b) 尺度变换之后; (c) Fourier 变换之后; (d) Chirp 乘积变换之后; (e) Chirp 卷积变换之后; (f) 分数阶 Fourier 变换之后

Fig. 1 WVD of (a) original signal, (b) scale transform, (c) FT, (d) CM, (e) CC, and (f) FRFT

和距离矩阵：

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (53)$$

以及范围向量：

$$E = \begin{bmatrix} W_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = \max |SD|,$$

其中： $W_0$ 和 $B_0$ 分别是信号的时宽和带宽，离散点恢复连续信号的最小采样点数 $N_0$ 可以通过以下矩阵相乘得：

$$N_0 = W_0 B_0 = \frac{1}{2} E^T R E, \quad (54)$$

其中  $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

根据 LCT 与 WVD 的关系，经过 LCT 以后，在新的时频平面  $t'-u'$  下(如图 2(b))，时频区域多边形的形状发生了改变，但是面积和多边形的边数与原信号在时频平面  $t-u$  相同，设在新的坐标变换意义下：

$$S' = \begin{bmatrix} t'_1 & t'_2 & t'_3 & t'_4 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 & u'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} S, \quad (55)$$

那么相应的新范围向量：

$$E' = \begin{bmatrix} W_n \\ B_n \end{bmatrix} = \max |S'D|, \quad (56)$$

继而可以得到新的 SBP：

$$N_n = W_n B_n = \frac{1}{2} E'^T R E'. \quad (57)$$

如果坐标矩阵  $S$  和距离矩阵  $D$  应用于  $n$  个顶点的边界区域，那么坐标矩阵  $S$  转变为  $2 \times n$  维矩阵，距离矩阵  $D$  变为  $n \times \sum_{j=1}^{n-1} j$  维。

光学中常常用到的几种特殊 LCT<sup>[58]</sup>，如光学

Fourier 变换，光学分数阶 Fourier 变换，FST 变换，尺度变换(ST)，利用上述定义的矩阵  $S$ 、 $S'$  和  $D$  求得信号经过这些变换后信号的 SBP。结果表明光学 Fourier 变换和尺度变换对信号变换前后时宽乘积没有影响；光学分数阶 Fourier 变换和 Chirp 调制信号，以及 FST 变换对信号变换前后信号 SBP 会随变换参数改变。为了保证离散 LCT 在 Nyquist-Shannon 采样定理意义下能够很好地逼近连续情况，要根据  $N_0$  和  $N_n$  关系确定每种变换在离散情况下插值或抽取倍数<sup>[92-94]</sup>。

在很多文献中已对这些特殊变换的离散方法进行了研究<sup>[56,95-101]</sup>。在光学中应用最为广泛的 FFT 可以被用来计算分数 Fourier 变换<sup>[56,59,64,102-105]</sup>，FST<sup>[106-107]</sup>。对处理采样点数  $N$  很大的情况，能够提高算法的效率。因此，可以将 FRFT，FST，LCT 等分解为包含 FT 的变换进行离散算法的研究。又因为，尺度变换不改变信号的 SBP，只是将采样间隔改变为  $\Delta t \rightarrow S\Delta t, \Delta u \rightarrow \Delta u/S$ ， $S$  是尺度变换因子，所以它的离散化方法可以直接对连续变换进行采样即可。对于 Chirp 乘积进行离散算法研究时只需要将离散的序列与离散的 Chirp 信号相乘。而 FST 相当于  $x(t)$  与  $e^{i\pi t(\lambda f)}$  的卷积，基于时域卷积可利用频域的相乘实现，那么离散 FST 实现可以通过 FFT 与 IFFT 来快速计算。所以根据矩阵相乘可以将 FST 分解为只包含 FT，ST，CM 算子乘积形式<sup>[58,108]</sup>。

最早，在文献[109-110]中，已经给出了 LCT 参数矩阵的分解，但是没有给出相应的数值计算方法。后来，在文献[58]中结合现有的 FST，FRFT 的离散化算法，将 LCT 算子分解为 FT、ST、CM、FST、FRFT 算子的组合，提出了相应的快速算法。文献[58]首先给出了以下四种 FST 的分解形式：

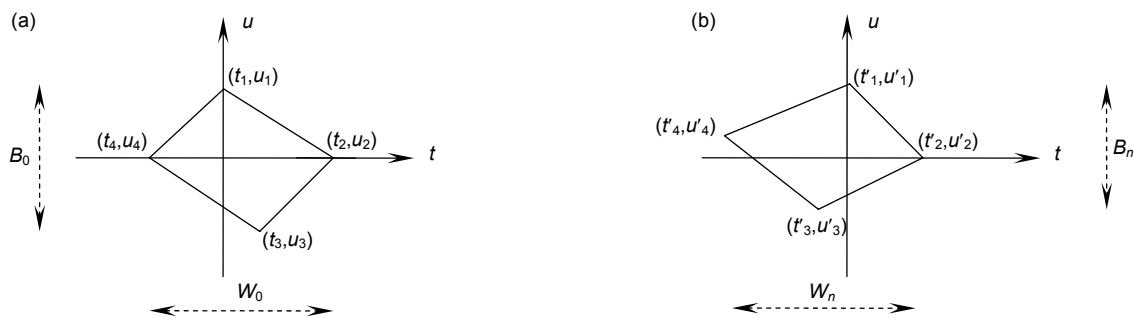


图 2 任意信号 LCT 的 WVD 的影响。(a) 变换之前；(b) LCT 变换之后

Fig. 2 WVD of (a) original signal and (b) LCT

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 1 & \lambda z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda z & 0 \\ 0 & 1/\lambda z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda z & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1/M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda f_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \lambda z_T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda f_1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sec\left(\frac{p\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\lambda q} \cdot \tan\left(\frac{p\pi}{2}\right) & 1 \end{bmatrix} \\
 &\cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) & \lambda q \cdot \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \\ -\frac{1}{\lambda q} \cdot \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (58)
 \end{aligned}$$

其中： $z_T = f_1 + f_2$ ， $M = 1 - z_T / f_2$ ， $z = M z_T$ ， $f_1$ 和 $f_2$ 是任意的， $q \tan(p\pi/2) = z$ ；然后研究了三种 FRFT 分解形式<sup>[56,111-112]</sup>：

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) & \lambda q \cdot \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\lambda f} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\lambda f} & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T-S & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{S} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T-S & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\lambda q} \cdot \cot\left(\frac{p\pi}{2}\right) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda q \cdot \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda q} \cdot \csc\left(\frac{p\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \\
 &\cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\lambda q} \cdot \cot\left(\frac{p\pi}{2}\right) & 1 \end{bmatrix}, \quad (59)
 \end{aligned}$$

其中： $S = 1/\sin(p\pi/2)$ ， $T = 1/\tan(p\pi/2)$ ；最后，基于以上 FST 和 FRFT 的分解，文献[58]提出了 LCT 的分解：

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\lambda f} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) & \lambda q \cdot \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \\ -\frac{1}{\lambda q} \cdot \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (60)$$

其中： $m \cos(p\pi/2) = a$ ， $m \lambda q \sin(p\pi/2) = b$ 选择 $f$ 使得 $a/\lambda f - \sin(p\pi/2)/m q \lambda = c$ ，根据式(58)和式(59)，得到 LCT 的十种分解。这些分解当信号从右至左依次通过系统时，在 Nyquist-Shannon 采样意义下，选择合适的插值或抽取倍数保证分解过程中每一步采样的充分性。不同分解插值或者抽取的倍数不同，相应的计算复杂度不同，在只保证精确度的情况下这些分解是相互等价的，并且这里 LCT 变换参数是任意的，消除了之前一些算法对参数的限制<sup>[113]</sup>。同时，SBP 的计算方法为 LCT 算子矩阵分解提供了很好的理论基础。在此基础上，Ozaktas 等人针对时频区域是矩形的情况，结合算法的计算复杂度，对不同的变换参数提出了两种矩阵分解的 DLCT 算法<sup>[91]</sup>。

### 5.3 时频是矩形区域的矩阵分解算法

在文献[91]中，Ozaktas 等人为了使得时域和频域的采样间隔无量纲，在进行离散化之前对信号进行了量纲归一化处理<sup>[114]</sup>，使得被分析信号的时间和频率范围都限制在 $[-W/2, W/2]$ 区间内，那么使得离散信号能够恢复连续信号的最少采样点数为 $N_0 = W^2$ 。在实际计算中 $N_0$ 不易过大，通常选择 $N$ 就是归一化后 SBP 的值，因为太大的 $N$ 会增加计算复杂度，但是并不能提高算法精度。

在文献[91]中，方法 I 是将 LCT 算子分解为只包含尺度变换算子，Fourier 变换算子，Chirp 乘积算子的组合，例如将 LCT 参数矩阵 A 分解为如下形式：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\gamma}{\beta^2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1/\beta \end{bmatrix}. \quad (61)$$

从右往左第一个矩阵是尺度变换，它只改变信号的时域和频域的采样间隔，经过第一个变换之后信号的时宽是 $|\beta|W$ ，频宽为 $W/|\beta|$ ，此时 $N_1 = N_0$ ；第二个矩阵相当于 CM，经过此变换以后信号的时宽 $W/|\beta| + W|\gamma/\beta|$ ，频宽为 $|\beta|W$ ，此时， $N_2 = (1 + |\gamma|)N_0$ ，那么，要使变换经过 CM 变换之后在 Nyquist-Shanon 意义下 2 倍过采样是充分的，则应满足：

$$\left( \left| \frac{1}{\beta} \right| W + \left| \frac{\gamma}{\beta^2} \right| |\beta| W \right) |\beta| W = (1 + |\gamma|) W^2 \leq 2W^2. \quad (62)$$

因此，从上面不等式可得 $|\gamma| \leq 1$ ；再经过第三个

矩阵相当于 FT 变换,此时信号的时宽为 $|\beta|W$ ,带宽 $1/|\beta|W+|\gamma/\beta|W$ ,相应信号的 SBP 为 $N_3=N_2$ ;最后一个 CM,经过这个变换之后,信号的 SBP 为 $N_4=(1+|\gamma|+|\alpha|(1+|\gamma|^2)/|\beta|^2)W^2$ 。如果 $N_4$ 小于 $N_0$ 的 2 倍,那么不需要插值和抽取计算,如果大于 $2N_0$ ,这里假设是 $N_0$ 的 $k$ 倍,则有如下不等式成立:

$$1+|\gamma|+\frac{|\alpha|(1+|\gamma|^2)}{|\beta|^2} \leq k \quad (63)$$

这里 $k$ 为不等式成立的最小整数。因此离散过程中前一个变换结果作为新变换的输入,在离散化之前要判断采样点数是否充分这样才能保证最终的 DLCT 能够很好地逼近连续 LCT。

假设原始采样点数是 $N$ ,第一个变换是尺度变换,那么相应的计算量设为 $S(N)$ ;第二变换计算量包括插值计算和 CM 计算,这里用 $I(N,2)$ 表示对 $N$ 点进行 2 倍插值,插值以后采样点数变换 $2N$ 个点,那么 CM 的计算量为 $2N$ 次复数乘法;然后利用 FFT 做 $2N$ 点的变换,计算量为 $N \log(2N)$ ;最后一个变换是 CM,在计算之前首先对信号进行 $k/2$ 的插值,计算量为 $I(2N,k/2)$ ,而 CM 的计算量为 $Nk$ 次的乘法,最后所需要总的计算量为

$$S(N)+I(N,2)+2N+N \log(2N)+I(2N,k/2)+Nk \quad (64)$$

由于这里只用到了尺度变换,CM 和 FT 变换算子,因此这个算法的计算复杂度为 $O(N \log(2N))$ 。

从上面的分解可以得出,只有 CM 会改变算法所需的采样点数,在没有遇到 CM 乘积时,不需要对信号插值或抽取运算。因此对矩阵进行分解时,尽可能少地将分解中含有 CM,并且尽可能地将 CM 在矩阵分解顺序中出现得晚一些,这样可以减少插值或者抽取倍数。在 Nyquist-Shanon 采样的意义下,针对不同的 LCT 参数,保证分解中每一个变换之后信号 2 倍采样的充分性,考虑的计算复杂度和计算效率,可以根据参数 $\gamma$ 是否满足 $|\gamma|<1$ ,将参数矩阵 $A$ 分解为以下六种形式,当 $|\gamma| \leq 1$ 时:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \\ \beta^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \\ \beta^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

当 $|\gamma| > 1$ 时,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha - \frac{\beta^2}{\gamma} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{\beta} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\gamma} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha - \frac{\beta^2}{\gamma} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\gamma}{\beta^2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{\beta} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{\gamma} \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{\beta} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma + \alpha \frac{\gamma^2}{\beta^2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\gamma} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

这六种分解形式,都只含有 CM,FT,尺度变换,它们出现的顺序不同,计算复杂度就不同。

在文献[91]中,方法 II 是将 LCT 变换分解为尺度变换,Chirp 乘积和 FRFT:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{a\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{a\pi}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{a\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (71)$$

其中: $a=(2/\pi) \operatorname{arccot} \gamma$ ,

$$M = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\beta}, & \gamma \geq 0 \\ -\frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\beta}, & \gamma < 0 \end{cases}, q = \frac{\gamma\beta^2}{1+\gamma^2} - \alpha.$$

这是经典的 Iwasawa 分解<sup>[115-116]</sup>的特殊情况。在执行算法时首先可以利用现有 FRFT 的离散算法<sup>[56,117-118]</sup>进行 FRFT 计算,FRFT 算法是这里算法的子程序;然后将 FRFT 得到结果作为输入,进行第二个矩阵对应的尺度变换运算,再将这个变换结果作为下一个变换的输入。因为下一个变换是 Chirp 乘积,它会改变信号的 SBP,所以在变换之前要根据 SBP 值判断是否需要离散输入数据进行插值或者抽取运算以保证采样的充分性。这两种方法的计算复杂度与 $\alpha, \beta, \gamma, N$ 相关,在不同参数情况下,两种算法都有自己的计算复

杂度，可以根据参数的不同选择合适的分解形式来实现快速计算。

文献[58]与文献[91]中算法相比较，前者是后者的理论基础，并且主要从光学应用角度出发，研究在光学意义下各种特殊变换对 SBP 的影响；矩阵分解主要是针对 LCT 特殊情况：尺度变换，FT，FST 和 FRFT 分解形式的研究，侧重变换矩阵的分解而不考虑实际应用中每种分解的计算复杂度，更注重的是分解理论，对信号时频区域的形状没有任何限制。而后者，从信号处理的角度，针对时频区间归一化处理之后的信号，结合变换对信号 WVD 的影响，考虑信号 SBP 的变化和算法的计算复杂度，提出了方法 I 和方法 II 两种分解。虽然不同的分解方法所需要的插值倍数和计算复杂度不同，但是所得的离散变换的结果都能很好的逼近连续变换的情况。

在文献[24]中，Pei 等人利用与文献[91]中方法 II 相同的分解方法，结合 FRFT，尺度变换和 Chirp 乘积的可扩展 Hermite 函数作为特征函数<sup>[119]</sup>提出了不需要过采样的 DLCT。这种离散算法具有一些好的性质，如酉性，可逆性和可加性，是满足 LCT 性质最多的离散算法，但是这个算法，没有闭合的表达式，计算复杂度是  $O(N^3)$ ，这给计算带来了很大的不方便。因此，在实际应用中很受限制。

文献[58,91]中的快速 DLCT 算法虽然能够很好地逼近连续的 LCT，但是算法一般不可逆，不满足可加性；其次，在计算过程中，算法需要进行插值或者抽取运算。文献[24]的算法虽然克服了文献[58,91]中的不足，但是没有闭合形式，且不具有快速的计算效率。为了克服这些不足，文献[25]利用 CM-CC-CM 分解方法<sup>[3,91,120-122]</sup>提出了与采样间隔无关并且不需要过采样的 DLCT，研究了对输入是纯粹离散数据的 LCT 快速算法。

假设输入的离散数据为  $x(n)$ ，定义参数矩阵  $A' = [a', b'; c', d']$ ， $a'd' - b'c' = 1$ ， $x(n)$  的 DLCT 为

$$X_A(m) = \sqrt{\frac{1}{ib'N}} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x(n) \cdot e^{i\frac{2\pi}{N} \left( \frac{d'}{2b'}m^2 - \frac{1}{b'}mn + \frac{a'}{2b'}n^2 \right)} \quad (72)$$

而其逆变换为

$$x(n) = \sqrt{\frac{1}{-ib'N}} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} X_A(m) e^{i\frac{2\pi}{N} \left( -\frac{a'}{2b'}n^2 + \frac{1}{b'}mn - \frac{d'}{2b'}m^2 \right)} \quad (73)$$

当参数矩阵  $A' = [0, 1; -1, 0]$ ，式(72)和式(73)退化为经典的 DFT。利用 CM-CC-CM 分解将参数矩阵  $A'$  分

解为

$$A' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d'-1} & 0 \\ \frac{1}{b'} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{b'} & 0 \\ \frac{a'-1}{b'} & 1 \end{bmatrix} \quad (74)$$

来对纯离散数据  $x(n)$  的 DLCT 快速实现。从文献[3,58,91]可知，CC 变换可以进一步分解为 FT，CM 和 IFT，即：

$$\begin{bmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b' & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (75)$$

那么式(72)可以分解为如下五步来快速计算：

$$X_A = C_{\frac{a'-1}{b'}} F^{-1} C_{-b'} F C_{\frac{a'-1}{b'}} x \quad (76)$$

其中：

$$C_{\frac{a'-1}{b'}}(n, n) = \exp\left(i \frac{\pi}{N} \frac{a'-1}{b'} n^2\right),$$

$$C_{-b'}(n, n) = \exp\left(-i \frac{\pi}{N} b'^2 n^2\right),$$

$$C_{\frac{a'-1}{b'}}(n, n) = \exp\left(i \frac{\pi}{N} \frac{d'-1}{b'} n^2\right),$$

$F$  和  $F^{-1}$  分别表示离散 Fourier 变换和逆离散 Fourier 变换，它们可以利用 FFT 来实现。 $X_A$  与  $x$  分别表示输入和输出的  $1 \times N$  向量，且限制参数  $b' \neq 0$ 。针对  $b' = 0$  的情况，可通过参数矩阵分解方法转化为  $b' \neq 0$  的情况，然后结合 CM-CC-CM 分解得到相应的离散变换结果。这个算法包含 2 次 FFT 算法和 3 个 Chirp 乘积，那么总计算量是  $3N + N \log_2(N)$  次复数乘法。当矩阵  $A'$  转换为  $A'^{-1}$ ，上述算法转变为了逆 DLCT：

$$x = C_{\frac{a'-1}{b'}} F^{-1} C_{b'} F C_{\frac{a'-1}{b'}} X_A \quad (77)$$

这种 DLCT 具有可逆性和可加性，并且与采样间隔无关。当变换参数矩阵  $A'$  取特殊情况时，可以得到特殊情况下 DLCT 的快速计算。这里连续 LCT 的变换参数  $a, b, c, d$  与  $a', b', c', d'$  的关系为

$$[a', b'; c', d'] = \left[ a, \frac{b}{\Delta t^2 N}; c \Delta t^2 N, d \right].$$

$\Delta t$  是对输入变量  $t$  和输出变量  $u$  进行长度为  $N$  的采样。当  $\Delta t = 1/\sqrt{N}$  时， $a, b, c, d$  与  $a', b', c', d'$  是相同的，那么通过对 LCT 变换参数进行变量代换可以实现采样信号 DLCT 的计算。

不同于文献[58,91,121]中提到的分解型快速 LCT 算法，文献[25]是基于输入信号为离散数据时提出的一种 DLCT 分解型快速实现方法，算法与采样间隔无关，不需要过采样算子，具有很好的可加性和可逆性，具有  $O(N \log_2(N))$  的计算复杂度。这种算法目前既满足可加性，同时又具有快速运算离散化方法，但是缺

少如直接离散 DLCT 的相对简单的闭合形式。

$$e^{i\frac{|b|}{N}\left(\frac{d}{2b}\frac{\Delta u}{\Delta t}m^2 + \frac{a\Delta t}{2b\Delta u}n^2 - \frac{mn}{b}\right)}, \quad (82)$$

#### 5.4 基于 LCT 域采样定理的时域阵分解 DLCT 算法

5.2 和 5.3 的快速 DLCT 是在 Nyquist-Shannon 采样的意义下, 基于信号在时域和传统的频域同时带限的条件下提出的, 具有与 FFT 相当的计算效率。而文献[22]提出的具有酉性的 DLCT 要求信号在时域和 LCT 域带限, 并且采样间隔由 LCT 的采样定理<sup>[35-36]</sup>决定, 这种类型的 DLCT, 可以通过矩阵分解快速实现, 即, 首先  $x(n\Delta t)$  先被 Chirp 信号  $e^{ia(n\Delta t)^2/(2b)}$  调制, 然后对调制后的信号做 FFT, 最后再被 Chirp 信号  $e^{id(m\Delta u)^2/(2b)}$  调制。这种算法所需要计算量是  $(M/2)\log_2^M + 2M$  次的复数乘法,  $M\log_2^M$  次复数的加法。在利用此算法时不需要对时域和频域变量做归一化处理<sup>[114]</sup>, 但是 DLCT 定义式(13)对于参数  $b=0$  的情况是不成立。在这样情况下, LCT 变换相当于尺度变换和 Chirp 乘积, 针对  $d$  为非整数的情况, 利用矩阵分解:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ d & -c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

先对  $x(t)$  做 FT, 然后再做参数为  $(0, -a; d, -c)$  的 LCT, 这样将  $b=0$  的情况转化为  $b \neq 0$ , 其闭合形式为

$$X_x^A(m\Delta u) = \sqrt{\frac{1}{NM}} e^{i\frac{c}{2a}(m\Delta u)^2} \cdot \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} x(k\Delta t) \cdot e^{-i2\pi\frac{nk}{2N+1}} \cdot e^{i2\pi\frac{mn}{M}\text{sgn}(a)}, \quad (78)$$

此时  $\Delta u = |a| \Delta t N / M$ 。Pei 等人<sup>[22]</sup>首次给出了 DLCT 的定义, 并且通过算子分解的方法快速实现, 但是并没有研究连续信号的 LCT 与 DLCT 的精确关系, 以及如何确定采样点数。在文献[63]中, Oktem 和 Ozaktas 基于 Pei 等人的 DLCT 定义<sup>[22]</sup>给出了 DLCT 与连续变之间的精确度关系, 如果输入信号是 Chirp 周期复制, 即:

$$\bar{x}(t)_{(A^{-1}, W)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nW) \cdot e^{-i\frac{a}{2b}nW(2t-nW)}, \quad (79)$$

$$\bar{L}_x^A(u)_{(A, B)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_x^A(u-nB) \cdot e^{i\frac{d}{2b}nB(2u-nB)}, \quad (80)$$

其中:  $W, B$  是任意的, 对式(79)和式(80)分别以采样间隔:

$$\Delta t = \frac{|b|}{B}, \Delta u = \frac{|b|}{W}, \quad (81)$$

采样, 对于任意的  $m$ , 有如下精确相等关系:

$$\bar{L}_x^A(m\Delta u)_{(A, B)} = \Delta t \sum_{n \in \langle N \rangle} \bar{x}(n\Delta t)$$

$N = BW / |b|$  是 DLCT 能够很好逼近连续 LCT 的最少采样点数。式(82)说明如果输入是 Chirp 周期信号, 那么在任意 Chirp 周期内, 这个 DLCT 能够精确的等于 LCT, 这是经典的 FT 与 DFT 精确关系的推广。如果信号是非周期的, 信号的大部分能量都集中在时域区间  $[-W/2, W/2]$  和 LCT 域区间  $[-B/2, B/2]$  内, 即  $X^A(u) \approx \bar{L}_x^A(u)_{(A, B)}$ ,  $x(t) \approx \bar{x}(t)_{(A^{-1}, W)}$ , 那么采样信号的 DLCT 为

$$X^A(m\Delta u) \approx \Delta t \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x(n\Delta t) \cdot e^{i\frac{|b|}{N}\left(\frac{d}{2b}\frac{\Delta u}{\Delta t}m^2 + \frac{a\Delta t}{2b\Delta u}n^2 - \frac{mn}{b}\right)}, \quad (83)$$

$\Delta t$  和  $\Delta u$  见式(81)。如果  $x(t)$  和  $X^A(u)$  在给定的区间之外都为零, 那么式(83)将精确相等。但是一个信号和它的 LCT 不可能同时带限, 这样采样信号的 DLCT 在 LCT 域将具有 Chirp 周期性质, 并且 DLCT 能够很好地逼近连续 LCT。所以只有 Chirp 周期信号才会在离散和连续之间具有精确相等的关系。然而, 在实际应用中很多信号是非 Chirp 周期, 这时就需要利用式(83)近似计算 LCT, 结合式(81)确定采样间隔和采样点数。这里信号在时域和 LCT 域带限, 对应的时频区域是平行四边形<sup>[123]</sup>, 最小采样点数  $N$  根据双边带宽乘积确定<sup>[63]</sup>, 它是支撑区域平行四边行面积。此外, Oktem 和 Ozaktas 等人给出了独立于采样区间的 DLCT<sup>[63]</sup>, 可以用来计算输入是离散数据的 DLCT, 由于利用 FFT 和 Chirp 乘积实现, 因此计算复杂度与 FFT 相当。

## 6 其他 DLCT

除了以上的 DLCT 定义之外, 还有一些其他的定义。在文献[124]中, Campos 等人利用与文献[22]相同的分解方式, 提出了与采样间隔无关的具有酉性的 DLCT 快速实现方法。这种算法的核心是 FT 算法的实现。在文献[124-125]中, 根据线性空间中 Hermite 多项式及其零点的一些性质, 将 Hermite 多项式的近似零点作为变换的采样点来实现 DLCT 的快速算法, 计算复杂度是  $O(N \log N)$ , 这个算法能够很好地应用于图像的边缘检测中。在文献[126]中, 李炳照等人基于 LCT 的特征函数, 提出了在 LCT 变换参数  $|b| \leq 2$  的情况下的特征型离散算法, 给出了类似于 FRFT 谱分解的定义<sup>[127]</sup>, 通过对谱分解定义进行离散, 得到了相应的 DLCT。这种算法实现简单, 容易理解, 但是具有  $N^2$  的计算复杂度。在此离散化算法的基础上, 魏德运等

人在文献[128]中,通过将 LCT 的特征向量和特征值与变换参数相关的随机化,提出了一种自由度更高的随机离散化的方法,这种方法能够很好地应用于图像加密和信息安全方面,但是具有  $N^2$  的计算复杂度。在文献[129]中,张峰等人针对输入信号随时间不断更新的情况,利用自适应滤波提出了一种具有自适应性质的 DLCT,其算法具有并行计算的特性,能够通过 VLSI 有效实现<sup>[129]</sup>。近些年来,一些研究者对复线性正则变换<sup>[130-132]</sup>进行了研究。实参数的 LCT 与复参数的关系就相当于经典的 FT 和拉普拉斯变换的关系。对于复参数的 LCT,在文献[133-134]中,分别给出了两种不同的数值计算方法。文献[133]重点研究算法采样的充分性,利用参数矩阵分解的方法,提出了 CM-CC-CM 分解的算法,与前面提到的分解<sup>[25,91]</sup>不同的是,这些分解得到的矩阵元素是复数。文献[134]利用 FFT 算法,通过对沿复平面内多条线的离散化整合,得到任意复平面的快速离散复线性正则变换,这种离散化方法与采样间隔和采样点数无关,是目前较为实用的复离散线性正则变换的算法。在文献[135]中,Pei 等人借助于一类特殊的复线性正则变换 Bargmann 变换与 Gabor 变换, Hermite Gaussian 函数和二维不可分离线性正则变换的关系<sup>[136-138]</sup>,结合已有的 Gabor 变换的离散化方法,提出了四类复线性正则变换快速的、精度较高的计算方法,同时研究了 Bargmann 变换的逆变换的离散化方法。

虽然现在已有很多 LCT 的离散化方法,但是这些算法都有各自的限制。针对不同类型的信号,选择相应的快速实现方法。因此针对这些算法之间的相互比较是没有意义的。LCT 变换的具有三个自由参数,使其具有灵活性的优势之外,还给离散化算法带来了复杂性。这些算法除了文献[24-25]中的算法具有可加性质之外,其他的算法都不满足这一性质。现在没有像 FFT 和 FRFT 一样可以通用的算法,因此 LCT 的离散化算法与快速实现方法的研究仍有很多方面需要进一步深入研究。

## 7 结论和未来研究方向

通常一个好的 DLCT 应该满足第 2 部分提到的 1)~4)的性质。第 1)条性质是定义离散变换的出发点;第 2)条和第 3)条性质是连续 LCT 的基本性质,我们希望离散变换形式也同样具有这 2)条性质;第 4)条是 DLCT 为普通的离散线性积分推广的必然条件。除此之外,我们还希望所定义的 DLCT 具有快速计算方法,并且还可以写成闭合形式。通过前面几部分的分析,将三种类型的算法是否逼近连续的 LCT,是否具有闭合形式,以及每一类算法的复杂度总结如表 2。

对于直接离散的 DLCT 在采样间隔满足 Ding 采样频率<sup>[72]</sup>或者是其  $q$  倍时,所得到的 DLCT 具有酉性。这种情况的 DLCT 能够很好地逼近连续的 LCT,同时具有闭合的形式,不需要对时域和频域变量进行量纲归一化处理,所处理信号的时频区域没有任何限制,但是其直接实现计算复杂度是  $O(N^2)$ ,这限制了实际应用。

针对基分解的算法,是在直接离散 DLCT 基础上实现的。这种算法具有直接离散所具有显示表达式的优点,同时具有快速的计算方法,这种算法不需要量纲归一化处理,时域和 LCT 域的采样间隔需要满足条件  $\Delta t \Delta u = 1/(N|\beta|)$ 。在已知信号的时宽, LCT 域带宽和采样点数这三个变量中任意两个的情况下可以使用此算法来快速实现。

针对算子分解 DLCT 的快速算法,此类算法重点是考虑采样的充分性,侧重计算精度和计算效率。在 Nyquist-Shanon 采样意义下的分解型 DLCT(5.2 和 5.3 部分),能够很好地逼近连续 LCT。如果在一些应用中,只是希望 DLCT 可以很好地逼近连续 LCT,而不利用旋转相加性,这时可以把连续 LCT 用这种 DLCT 取代,但这种分解 DLCT 不具有闭合形式。而在 LCT 域采样定理的条件下提出的分解型 DLCT(5.3 部分),利用两个 Chirp 乘积和 FFT 实现。这种算法具有酉性和  $O(N \log N)$  的复杂度,在使用中采样间隔要满足

表 2 3 种主要类型 DLCT 的比较  
Table 2 Comparison of 3 main types of DLCT

性质	直接离散 LCT	基分解的快速 DLCT	算子分解 DLCT
近似连续变换	是	是	是
是否具有闭合形式	是	是	否
计算复杂度	$O(N^2)$	$O(N \cdot \log N)$	$O(N \cdot \log kN)$



$\Delta u = 2\pi |b| / (N\Delta t)$  或  $\Delta u = 1 / (N\Delta t |\beta|)$ 。

如果输入的数据是单纯的离散数据,可以利用 Pei 和 Ozaktas 等人提出的与采样间隔无关的 DLCT 快速算法<sup>[25,59]</sup>,此算法具有可逆性和可加性。当时域和 LCT 域的采样间隔为  $1/\sqrt{N}$  时,与区间有关的经过量纲归一化后的 DLCT 也可以由 Pei 等人在文献<sup>[25]</sup>中提出的算法来高效精确的实现。当纯离散数据的 DLCT 的变换参数和采样间隔有关的 DLCT 的变换参数满足

$$[a', b'; c', d'] = \left[ a, \frac{b}{\Delta t^2 N}; c\Delta t^2 N, d \right]$$

时,后者能够由 Ozaktas 提出的快速算法实现<sup>[59]</sup>,这种算法的优势是利用较少的采样点能够很好地恢复连续 LCT,且对输入信号的限制比较少,同时具有简单的闭合形式和较多 LCT 变换的性质,因此,这类算法将会成为以后应用最为广泛的算法。

目前出现了很多有关 LCT 离散化算法与快速算法的研究,但是仍然缺少严格意义的快速实现方法,很多算法缺少连续变换所具有可加性质。对于在满足什么条件下算法才具有可加性质是很值得深入探究的一个方向。另外,在工程应用中,经常会因为一些设备的抖动等原因,产生离散点的不均匀情况,因此,针对非均匀采样的 DLCT 的快速算法研究对实际应用有很重要的价值。针对极坐标形式的 LCT 在图像处理中有很广泛的影响,至今仍然没有对极坐标意义下的 DLCT 的研究,因此其研究将成为一个重要的研究方向。

总之,随着研究的不断深入,LCT 的离散化方法不断完善,LCT 将在实际生活中具有很好的应用前景。

## 参考文献

- [1] Moshinsky M, Quesne C. Linear canonical transformations and their unitary representations[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1971, **12**(8): 1772–1780.
- [2] Collins S A. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1970, **60**(9): 1168–1177.
- [3] Ozaktas H M, Zalevsky Z, Kutay M A. *The Fractional Fourier Transform: with Applications in Optics and Signal Processing*[M]. New York: Wiley, 2001.
- [4] Wolf K B. *Integral Transforms in Science and Engineering*[M]. New York: Plenum, 1979.
- [5] Bernardo L M. ABCD matrix formalism of fractional Fourier optics[J]. *Optical Engineering*, 1996, **35**(3): 732–740.
- [6] James D F V, Agarwal G S. The generalized Fresnel transform and its application to optics[J]. *Optics Communications*, 1996, **126**(4–6): 207–212.
- [7] Hua J W, Liu L R, Li G Q. Extended fractional Fourier transforms[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1997, **14**(12): 3316–3322.
- [8] Bastiaans M J. Wigner distribution function and its application to first-order optics[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1979, **69**(12): 1710–1716.
- [9] Bartelt H O, Brenner K H, Lohmann A W. The wigner distribution function and its optical production[J]. *Optics Communications*, 1980, **32**(1): 32–38.
- [10] Tao R, Qi L, Wang Y. *Theory and Applications of the Fractional Fourier Transform*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. 陶然, 齐林, 王越. 分数阶 Fourier 变换的原理与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [11] Tao R, Zhang F, Wang Y. Research progress on discretization of fractional Fourier transform[J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2008, **51**(7): 859–880. 陶然, 张峰, 王越. 分数阶 Fourier 变换离散化的研究进展[J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2008, **38**(4): 481–503.
- [12] Li B Z, Tao R, Xu T Z, et al. The Poisson sum formulae associated with the fractional Fourier transform[J]. *Signal Processing*, 2009, **89**(5): 851–856.
- [13] Lee Q Y, Li B Z, Cheng Q Y. Discrete linear canonical transform of finite chirps[J]. *Procedia Engineering*, 2012, **29**: 3663–3667.
- [14] Liu S H, Shan T, Tao R, et al. Sparse discrete fractional Fourier transform and its applications[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, **62**(24): 6582–6595.
- [15] Kang X J, Zhang F, Tao R. Multichannel random discrete fractional Fourier transform[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, **22**(9): 1340–1344.
- [16] Kang X J, Tao R, Zhang F. Multiple-parameter discrete fractional transform and its applications[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, **64**(13): 3402–3417.
- [17] Wang J, Zhang Y D, Li G J, et al. Computation of the cascaded optical fractional Fourier transform under different variable scales[J]. *Optics Communications*, 2012, **285**(6): 997–1000.
- [18] Zhong Z, Zhang Y J, Shan M G, et al. Optical movie encryption based on a discrete multiple-parameter fractional Fourier transform[J]. *Journal of Optics*, 2014, **16**(12): 125404.
- [19] Sejdić E, Djurović I, Stanković L. Fractional Fourier transform as a signal processing tool: an overview of recent developments[J]. *Signal Processing*, 2011, **91**(6): 1351–1369.
- [20] Li B Z, Tao R, Wang Y. Fractional spectrum of non-uniformly sampled signals[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2006, **34**(12): 2146–2149. 李炳照, 陶然, 王越. 非均匀采样信号的分数阶数字频谱研究[J]. 电子学报, 2006, **34**(12): 2146–2149.
- [21] Barshan B, Kutay M A, Ozaktas H M. Optimal filtering with linear canonical transformations[J]. *Optics Communications*, 1997, **135**(1–3): 32–36.
- [22] Pei S C, Ding J J. Closed-Form discrete fractional and affine Fourier transforms[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, **48**(5): 1338–1353.
- [23] Ding J J, Pei S C. Additive discrete linear canonical transform and other additive discrete operations[C]//*Proceedings of the 2011 9th European Signal Processing Conference*, 2011: 2249–2253.
- [24] Pei S C, Lai Y C. Discrete linear canonical transforms based on dilated Hermite functions[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2011, **28**(8): 1695–1708.
- [25] Pei S C, Huang S G. Fast discrete linear canonical transform based on CM-CC-CM Decomposition and FFT[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, **64**(4): 855–866.
- [26] Ding J J, Pei S C, Liu C L. Improved implementation algorithms of the two-dimensional nonseparable linear canonical transform[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2012,

- 29(8): 1615–1624.
- [27] Pei S C, Ding J J. Eigenfunctions of linear canonical transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, **50**(1): 11–26.
- [28] Pei S C, Ding J J. Eigenfunctions of the offset Fourier, fractional Fourier, and linear canonical transforms[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2003, **20**(3): 522–532.
- [29] Ding J J, Pei S C. Eigenfunctions and self-imaging phenomena of the two-dimensional nonseparable linear canonical transform[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2011, **28**(2): 82–95.
- [30] Pei S C, Ding J J. Two-dimensional affine generalized fractional Fourier transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, **49**(4): 878–897.
- [31] Ding J J, Pei S C. Heisenberg's uncertainty principles for the 2-D nonseparable linear canonical transforms[J]. *Signal Processing*, 2013, **93**(5): 1027–1043.
- [32] Pei S C, Huang S G. Two-dimensional nonseparable discrete linear canonical transform based on CM-CC-CM-CC decomposition[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2016, **33**(2): 214–227.
- [33] Pei S C, Huang S G. Reversible joint hilbert and linear canonical transform without distortion[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, **61**(19): 4768–4781.
- [34] Pei S C, Lai Y C. Derivation and discrete implementation for analytic signal of linear canonical transform[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2013, **30**(5): 987–992.
- [35] Stern A. Sampling of linear canonical transformed signals[J]. *Signal Processing*, 2006, **86**(7): 1421–1425.
- [36] Stern A. Why is the linear canonical transform so little known?[C]//*Proceedings of the 5th International Workshop on Informational Optics*, 2006: 225–234.
- [37] Li B Z, Tao R, Wang Y. New sampling formulae related to linear canonical transform[J]. *Signal Processing*, 2007, **87**(5): 983–990.
- [38] Tao R, Li B Z, Wang Y, et al. On sampling of band-limited signals associated with the linear canonical transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, **56**(11): 5454–5464.
- [39] Li B Z, Xu T Z. Sampling in the linear canonical transform domain[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, **2012**: 504580.
- [40] Shi J, Liu X P, Zhang Q Y, et al. Sampling theorems in function spaces for frames associated with linear canonical transform[J]. *Signal Processing*, 2014, **98**: 88–95.
- [41] 许天周, 李炳照. 线性正则变换及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013.
- [42] Deng B, Tao R, Wang Y. Convolution theorems for the linear canonical transform and their applications[J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2006, **49**(5): 592–603.  
邓兵, 陶然, 王越. 线性正则变换的卷积定理及其应用[J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2007, **37**(4): 544–554.
- [43] Healy J J, Kutay M A, Ozaktas H M, et al. *Linear Canonical Transforms: Theory and Applications*[M]. New York: Springer, 2016.
- [44] Xu G L, Wang X T, Xu X G. Three uncertainty relations for real signals associated with linear canonical transform[J]. *IET Signal Processing*, 2009, **3**(1): 85–92.
- [45] Zhang Z C. Unified Wigner-Ville distribution and ambiguity function in the linear canonical transform domain[J]. *Signal Processing*, 2015, **114**: 45–60.
- [46] Bai R F, Li B Z, Cheng Q Y. Wigner-Ville distribution associated with the linear canonical transform[J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2012, **2012**: 740161.
- [47] Che T W, Li B Z, Xu T Z. The ambiguity function associated with the linear canonical transform[J]. *Eurasip Journal on Advances in Signal Processing*, 2012, **2012**: 138.
- [48] Guo Y, Li B Z. Blind image watermarking method based on linear canonical wavelet transform and QR decomposition[J]. *IET Image Processing*, 2016, **10**(10): 773–786.
- [49] Xu X N, Li B Z, Ma X L. Instantaneous frequency estimation based on the linear canonical transform[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2012, **349**(10): 3185–3193.
- [50] Song Y E, Zhang X Y, Shang C H, et al. The Wigner-Ville distribution based on the linear canonical transform and its applications for QFM signal parameters estimation[J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2014, **2014**: 516457.
- [51] Goel N, Singh K, Saxena R, et al. Multiplicative filtering in the linear canonical transform domain[J]. *IET Signal Processing*, 2016, **10**(2): 173–181.
- [52] Feng Q, Li B Z. Convolution and correlation theorems for the two-dimensional linear canonical transform and its applications[J]. *IET Signal Processing*, 2016, **10**(2): 125–132.
- [53] Yu Y X, Wang C Y, Chen Y, et al. A fast algorithm of linear canonical transformation for radar signal processing system[J]. *Advanced Materials Research*, 2014, **1049–1050**: 1245–1248.
- [54] Ding J J, Pei S C. Linear canonical transform[J]. *Advances in Imaging and Electron Physics*, 2014, **186**: 39–99.
- [55] Qiu W, Li B Z, Li X W. Speech recovery based on the linear canonical transform[J]. *Speech Communication*, 2013, **55**(1): 40–50.
- [56] Ozaktas H M, Arıkan O, Kutay M A. Digital computation of the fractional Fourier transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, **44**(9): 2141–2150.
- [57] Hennelly B M, Sheridan J T. Fast numerical algorithm for the linear canonical transform[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2005, **22**(5): 928–937.
- [58] Hennelly B M, Sheridan J T. Generalizing, optimizing, and inventing numerical algorithms for the fractional Fourier, Fresnel, and linear canonical transforms[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2005, **22**(5): 917–927.
- [59] Bultheel A, Sulbaran H E M. Computation of the fractional Fourier transform[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2004, **16**(3): 182–202.
- [60] Bultheel A, Sulbaran H E M. Recent developments in the theory of the fractional Fourier and linear canonical transforms[J]. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society, Simon Stevin*, 2006, **13**(5): 971–1005.
- [61] Cariolaro G, Erseghe T, Kraniuskas P, et al. A unified framework for the fractional Fourier transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, **46**(12): 3206–3219.
- [62] Erseghe T, Laurenti N, Cellini V. A multicarrier architecture based upon the affine Fourier transform[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2005, **53**(5): 853–862.
- [63] Oktem F S, Ozaktas H M. Exact relation between continuous and discrete linear canonical transforms[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2009, **16**(8): 727–730.
- [64] Erseghe T, Kraniuskas P, Cariolaro G. Unified fractional Fourier transform and sampling theorem[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, **47**(12): 3419–3423.
- [65] Wei D Y, Ran Q W, Li Y M. Sampling of bandlimited signals in the linear canonical transform domain[J]. *Signal, Image and Video Processing*, 2013, **7**(3): 553–558.
- [66] Wei D Y, Li Y M. Sampling and series expansion for linear canonical transform[J]. *Signal, Image and Video Processing*,

- 2014, **8**(6): 1095–1101.
- [67] Wei D Y, Li Y M. The dual extensions of sampling and series expansion theorems for the linear canonical transform[J]. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 2015, **126**(24): 5163–5167.
- [68] Zhao J, Tao R, Wang Y. Sampling rate conversion for linear canonical transform[J]. *Signal Processing*, 2008, **88**(11): 2825–2832.
- [69] Oktem F S, Ozaktas H M. Equivalence of linear canonical transform domains to fractional Fourier domains and the bicanonical width product: a generalization of the space-bandwidth product[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2010, **27**(8): 1885–1895.
- [70] Healy J J, Sheridan J T. Cases where the linear canonical transform of a signal has compact support or is band-limited[J]. *Optics Letters*, 2008, **33**(3): 228–230.
- [71] Zhao L, Healy J J, Sheridan J T. Unitary discrete linear canonical transform: analysis and application[J]. *Applied Optics*, 2013, **52**(7): C30-C36.
- [72] Ding J J. Research of fractional Fourier transform and linear canonical transform[D]. Taipei: National Taiwan University, 2001.
- [73] Healy J J, Sheridan J T. Sampling and discretization of the linear canonical transform[J]. *Signal Processing*, 2009, **89**(4): 641–648.
- [74] Healy J J, Sheridan J T. New fast algorithm for the numerical computation of quadratic-phase integrals[J]. *Proceedings of SPIE*, 2006, **6313**: 63130J.
- [75] Healy J J, Sheridan J T. Applications of fast algorithms for the numerical calculation of optical signal transforms[J]. *Proceedings of SPIE*, 2006, **6187**: 618713.
- [76] Healy J J, Sheridan J T. Time division fast linear canonical transform[C]//*Proceedings of 2006 IET Irish Signals and Systems Conference*, 2006: 135–138.
- [77] Healy J J, Sheridan J T. Fast linear canonical transforms[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2010, **27**(1): 21–30.
- [78] Duhamel P. Implementation of "Split-radix" FFT algorithms for complex, real, and real-symmetric data[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1986, **34**(2): 285–295.
- [79] Duhamel P, Vetterli M. Fast fourier transforms: a tutorial review and a state of the art[J]. *Signal Processing*, 1990, **19**(4): 259–299.
- [80] Lohmann A W, Dorsch R G, Mendlovic D, et al. Space-bandwidth product of optical signals and systems[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1996, **13**(3): 470–473.
- [81] Qian S E, Chen D P. Decomposition of the Wigner-Ville distribution and time-frequency distribution series[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, **42**(10): 2836–2842.
- [82] Cohen L. *Time-frequency Analysis*[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995.
- [83] Hlawatsch F, Boudreaux-Bartels G F. Linear and quadratic time-frequency signal representations[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1992, **9**(2): 21–67.
- [84] Li Y G, Li B Z, Sun H F. Uncertainty principles for Wigner-Ville distribution associated with the linear canonical transforms[J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2014, **2014**: 470459.
- [85] Yan J P, Li B Z, Chen Y H, et al. Wigner distribution moments associated with the linear canonical transform[J]. *International Journal of Electronics*, 2013, **100**(4): 473–481.
- [86] Zayed A L. On the relationship between the Fourier and fractional fourier transforms[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 1996, **3**(12): 310–311.
- [87] Ozaktas H M, Mendlovic D. Fractional Fourier transforms and their optical implementation. II[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1993, **10**(12): 2522–2531.
- [88] Ozaktas H M, Mendlovic D. Fractional Fourier optics[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1995, **12**(4): 743–751.
- [89] Ozaktas H M, Barshan B, Mendlovic D, et al. Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1994, **11**(2): 547–559.
- [90] Irfan M, Zheng L Y, Shahzad H. Review of computing algorithms for discrete fractional Fourier transform[J]. *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*, 2013, **6**(11): 1911–1919.
- [91] Koç A, Ozaktas H M, Candan C, et al. Digital computation of linear canonical transforms[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, **56**(6): 2383–2394.
- [92] Crochiere R E, Rabiner L R. Interpolation and decimation of digital signals—A tutorial review[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1981, **69**(3): 300–331.
- [93] Valenzuela R A, Constantinides A G. Digital signal processing schemes for efficient interpolation and decimation[J]. *IEE Proceedings G - Electronic Circuits and Systems*, 1983, **130**(6): 225–235.
- [94] Samantaray L, Panda R. Signal decimation and interpolation in fractional domain using non-linear basis functions[J]. *International Journal of Signal Processing, Image Processing and Pattern Recognition*, 2013, **6**(4): 415–430.
- [95] Cooley J W, Tukey J W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series[J]. *Mathematics of Computation*, 1965, **19**(90): 297–301.
- [96] Cochran W, Cooley J, Favin D, et al. What is the fast Fourier transform?[J]. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 1967, **15**(2): 45–55.
- [97] Kelly D P. Numerical calculation of the Fresnel transform[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2014, **31**(4): 755–764.
- [98] Kelly D P, Hennesly B M, Rhodes W T, et al. Numerical implementation of the Fresnel transform, and its application in linear optical systems[J]. *Proceedings of SPIE*, 2005, **5908**: 59080F.
- [99] Falconer D G, Winthrop J T. Fresnel transform spectroscopy[J]. *Physics Letters*, 1965, **14**(3):190–191.
- [100] Lang J, Tao R, Wang Y. The discrete multiple-parameter fractional Fourier transform[J]. *Science China(Information Sciences)*, 2010, **53**(11):2287–2299.
- [101] Deng X G, Bihari B, Gan J H, et al. Fast algorithm for chirp transforms with zooming-in ability and its applications[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2000, **17**(4): 762–771.
- [102] Ran Q W, Zhang H Y, Zhang Z Z, et al. The analysis of the discrete fractional Fourier transform algorithms[C]//*Electrical and Computer Engineering, 2009. CCECE '09. Canadian*, 2009: 979–982.
- [103] Deng X G, Li Y P, Fan D Y, et al. A fast algorithm for fractional Fourier transforms[J]. *Optics Communications*, 1997, **138**(4–6): 270–274.
- [104] Serbes A, Durak-Ata L. The discrete fractional Fourier transform based on the DFT matrix[J]. *Signal Processing*, 2011, **91**(3): 571–581.

- [105] Narayanan V A, Prabhu K M M. The fractional Fourier transform: theory, implementation and error analysis[J]. *Microprocessors and Microsystems*, 2003, **27**(10): 511–521.
- [106] Sypek M. Light propagation in the Fresnel region. New numerical approach[J]. *Optics Communications*, 1995, **116**(1–3): 43–48.
- [107] Mendlovic D, Zalevsky Z, Konforti N. Computation considerations and fast algorithms for calculating the diffraction integral[J]. *Journal of Modern Optics*, 1997, **44**(2): 407–414.
- [108] Rhodes W T. Numerical simulation of Fresnel-regime wave propagation: the light-tube model[J]. *Proceedings of SPIE*, 2001, **4436**: 21–26.
- [109] Nazarathy M, Shamir J. First-order optics—a canonical operator representation: lossless systems[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1982, **72**(3): 356–364.
- [110] Papoulis A. *Signal Analysis*[M]. New York: McGraw Hill, 1977.
- [111] García J, Mas D, Dorsch R G. Fractional-Fourier-transform calculation through the fast-Fourier-transform algorithm[J]. *Applied Optics*, 1996, **35**(35): 7013–7018.
- [112] Marinho F J, Bernardo L M. Numerical calculation of fractional Fourier transforms with a single fast-Fourier-transform algorithm[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1998, **15**(8): 2111–2116.
- [113] Mas D, Garcia J, Ferreira C, et al. Fast algorithms for free-space diffraction patterns calculation[J]. *Optics Communications*, 1999, **164**(4–6): 233–245.
- [114] Zhao X H, Deng B, Tao R. Dimensional normalization in the digital computation of the fractional Fourier transform[J]. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2005, **25**(4): 360–364.  
赵兴浩, 邓兵, 陶然. 分数阶傅里叶变换数值计算中的量纲归一化[J]. *北京理工大学学报*, 2005, **25**(4): 360–364.
- [115] Alieva T, Bastiaans M J. Alternative representation of the linear canonical integral transform[J]. *Optics Letters*, 2005, **30**(24): 3302–3304.
- [116] Bastiaans M J, Alieva T. Synthesis of an arbitrary ABCD system with fixed lens positions[J]. *Optics Letter*, 2006, **31**(16): 2414–2416.
- [117] Tao R, Liang G P, Zhao X H. An efficient FPGA-based implementation of fractional Fourier transform algorithm[J]. *Journal of Signal Processing Systems*, 2010, **60**(1): 47–58.
- [118] Yang X P, Tan Q F, Wei X F, et al. Improved fast fractional-Fourier-transform algorithm[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2004, **21**(9): 1677–1681.
- [119] Pei S C, Lai Y C. Signal scaling by centered discrete dilated hermite functions[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(1): 498–503.
- [120] Koc A, Ozaktas H M, Hesselink L. Fast and accurate algorithms for quadratic phase integrals in optics and signal processing[J]. *Proceedings of SPIE*, 2011, **8043**: 804304.
- [121] Ozaktas H M, Koc A, Sari I, et al. Efficient computation of quadratic-phase integrals in optics[J]. *Optics Letters*, 2006, **31**(1): 35–37.
- [122] Healy J J, Kutay M A, Ozaktas H M, et al. *Linear Canonical Transforms: Theory and Applications*[M]. New York: Springer, 2016.
- [123] Healy J J, Sheridan J T. Reevaluation of the direct method of calculating Fresnel and other linear canonical transforms[J]. *Optics Letters*, 2010, **35**(7): 947–949.
- [124] Campos R G, Figueroa J. A fast algorithm for the linear canonical transform[J]. *Signal Processing*, 2011, **91**(6): 1444–1447.
- [125] Campos R G, Juárez L Z. A discretization of the continuous fourier transform[J]. *Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 1992, **107**(6): 703–711.
- [126] Zhang W L, Li B Z, Cheng Q Y. A new discretization algorithm of linear canonical transform[J]. *Procedia Engineering*, 2012, **29**: 930–934.
- [127] Namias V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics[J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1980, **25**(3): 241–265.
- [128] Wei D Y, Wang R K, Li Y M. Random discrete linear canonical transform[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2016, **33**(12): 2470–2476.
- [129] Zhang F, Tao R, Wang Y. Discrete linear canonical transform computation by adaptive method[J]. *Optics Express*, 2013, **21**(15): 18138–18151.
- [130] Wolf K B. Canonical transforms. I. Complex linear transforms[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1974, **15**(8): 1295–1301.
- [131] Wolf K B. Canonical transforms. II. Complex radial transforms[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1974, **15**(12): 2102–2111.
- [132] Kramer P, Moshinsky M, Seligman T H. Complex extensions of canonical transformations and quantum mechanics[M]//Inui E, Tanabe Y, Onodera Y. *Group Theory and Its Applications*. New York: Academic Press, 1975: 249–332.
- [133] Koç A, Ozaktas H M, Hesselink L. Fast and accurate algorithm for the computation of complex linear canonical transforms[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2010, **27**(9): 1896–1908.
- [134] Liu C G, Wang D Y, Healy J J, et al. Digital computation of the complex linear canonical transform[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2011, **28**(7): 1379–1386.
- [135] Pei S C, Huang S G. Fast and accurate computation of normalized Bargmann transform[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2017, **34**(1): 18–26.
- [136] Fan H Y, Chen J H. EPR entangled state and generalized Bargmann transformation[J]. *Physics Letters A*, 2002, **303**(5–6): 311–317.
- [137] Abreu Lís D. Sampling and interpolation in Bargmann–Fock spaces of polyanalytic functions[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2010, **29**(3): 287–302.
- [138] Zayed A I. Chromatic expansions and the bargmann transform[M]//Shen X P, Zayed A I. *Multiscale Signal Analysis and Modeling*. New York: Springer, 2013.

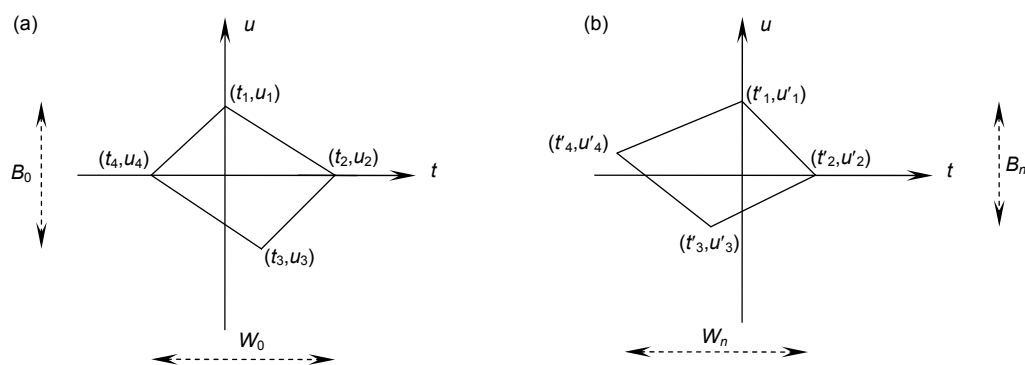
# Research progress on discretization of linear canonical transform

Sun Yannan<sup>1,2</sup>, Li Bingzhao<sup>1,2\*</sup>, Tao Ran<sup>3</sup>

<sup>1</sup>School of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

<sup>2</sup>Beijing Key Laboratory on MCAACI, Beijing 100081, China;

<sup>3</sup>School of Information and Electronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China



Effect of LCT on arbitrary signal WVD. (a) Before LCT; (b) After LCT

**Overview:** Linear canonical transformation (LCT) is a generalized form of linear integral transform, which is a three-parameter linear integral transform. The LCT unifies a variety of transforms from the well-known Fourier transform (FT), fractional Fourier transform (FRFT) and Fresnel transform (also known as chirp convolution (CC)) to simple operations such as scaling and chirp multiplication (CM). The LCT is an important tool in optics because a broad class of optical systems including thin lenses, sections of free space in the Fresnel approximation, sections of quadratic graded-index media, and arbitrary concatenations of any number of these, sometimes referred to as first-order optical systems the paraxial light propagation can be modeled by the LCT. Besides, as a generalization of the transforms mentioned above, the LCT could be more useful and attractive in many signal processing applications, such as filter design, radar system, time-frequency analysis, phase reconstructions, and so on. On the other hand, the LCT can also be used in the fields of application mathematics, such as solution of differential equations. Therefore, the LCT has attracted a considerable amount of attention in many areas. In order to promote the applications of LCT, the discretization becomes the key vital issue of the LCT. Since the discretization of LCT cannot be obtained by directly sampling in time domain and LCT domain, it has been investigated recently. After the continuous LCT has been introduced, the definition and implementation of the discrete LCT (DLCT) have been widely considered by many researchers. Based on the development history of LCT discretization, a review of important research progress and current situation of discretization methods in the last nearly two decades is presented in this paper. The discretization algorithms include, discrete-time LCT, linear canonical series, discrete linear canonical transform. In this paper, the existing discretization methods are divided into three categories, directly discrete LCT, which appeared to have been first undertaken by Pei and Ding; operator decomposition LCT, which decomposed into products of these special operator combinations through the benefit of the additive property of the LCT; base decomposition fast discrete LCT, which was also first utilized by Hennelly and Sheridan to fast-implement DLCT; and other discrete LCT. Meanwhile, the connection among different discretization algorithms and the future development direction are given. It provides important reference value for researcher in the related fields, and can further promote its engineering application. With the deepening of research, LCT will be more and more widely used in practical applications.

**Citation:** Sun Y N, Li B Z, Tao R. Research progress on discretization of linear canonical transform[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2018, **45**(6): 170738

Supported by National Natural Science Foundation of China (61671063) and Foundation for Innovative Research Groups of the National Natural Science Foundation of China (61421001)

\* E-mail: li\_bingzhao@bit.edu.cn