



DOI: 10.12086/oe.2019.180273

## 横向剪切干涉测量中一种获得无耦合 Zernike 系数的模式复原方法

孙文瀚<sup>1,2,3</sup>, 王帅<sup>1,2\*</sup>, 何星<sup>1,2</sup>,  
陈小君<sup>1,2,3</sup>, 许冰<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610209;

<sup>2</sup>中国科学院自适应光学重点实验室, 四川 成都 610209;

<sup>3</sup>中国科学院大学, 北京 100049

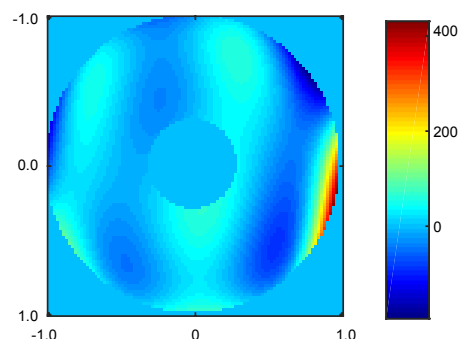
**摘要:** 模式耦合误差常见于横向剪切干涉测量中基于波前梯度数据模式复原法, 其原因是用于表示波前的基函数——Zernike 圆多项式的导数不正交。使用一种含有 Gram 矩阵的矩阵方程进行复原, 直接利用 Zernike 圆多项式  $m \neq 0$  模式角向导数对于权重函数  $w(\rho) = \rho$  (极坐标下) 的正交性, 以及 Zernike 圆多项式  $m = 0$  模式径向导数对于权重函数  $w(\rho) = \rho(1 - \rho^2)$  (极坐标下) 的正交性进行复原。该方法无需构造辅助的向量函数, 并可得到无耦合的 Zernike 系数, 复原结果表明, 模式耦合得到了避免。该方法可推广到环上, 得到无耦合的 Zernike 环多项式系数。

**关键词:** Zernike 圆多项式; Zernike 环多项式; 剪切干涉; 波前复原; 模式耦合

**中图分类号:** TB872

**文献标志码:** A

**引用格式:** 孙文瀚, 王帅, 何星, 等. 横向剪切干涉测量中一种获得无耦合 Zernike 系数的模式复原方法[J]. 光电工程, 2019, 46(5): 180273



## Modal wavefront reconstruction to obtain Zernike coefficient with no cross coupling in lateral shearing measurement

Sun Wenhan<sup>1,2,3</sup>, Wang Shuai<sup>1,2\*</sup>, He Xing<sup>1,2</sup>, Chen Xiaojun<sup>1,2,3</sup>, Xu Bing<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China;

<sup>2</sup>Key Laboratory on Adaptive Optics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China;

<sup>3</sup>University of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

**Abstract:** Modal cross coupling frequently occurs in modal approaches from wavefront gradient data such as lateral shearing measurement through Zernike circle polynomials, since the gradients of Zernike circle polynomials are not orthogonal. We use a modal approaches incorporating the Gram matrix, using the orthogonality of angular derivative of  $m \neq 0$  modes with respect to weight function  $w(\rho) = \rho$  (polar coordinates), and the orthogonality of radial derivative of

收稿日期: 2018-05-23; 收到修改稿日期: 2018-09-25

作者简介: 孙文瀚(1988-), 男, 博士研究生, 主要从事自适应光学的研究。E-mail: wenhansun1988@outlook.com

通信作者: 王帅(1988-), 男, 博士, 副研究员, 主要从事自适应光学的研究。E-mail: wangshuai@ioe.an.cn

许冰(1960-), 男, 硕士, 研究员, 主要从事自适应光学与激光技术的研究。E-mail: bingxu@ioe.ac.cn

$m=0$  modes with respect to weight function  $w(\rho)=\rho(1-\rho^2)$  (polar coordinates). The Gram matrix method needs no auxiliary vector functions. The Zernike coefficients can be obtained with no modal cross coupling. The simulation results are given, which indicate that the modal cross coupling is avoided by using Gram matrix method. This method can be easily extended to annulus, and the coefficients of Zernike annular polynomials with no modal cross coupling can be obtained.

**Keywords:** Zernike circle polynomials; Zernike annular polynomials; shearing interferometer; wavefront reconstruction; modal cross coupling

**Citation:** Sun W H, Wang S, He X, *et al.* Modal wavefront reconstruction to obtain Zernike coefficient with no cross coupling in lateral shearing measurement[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2019, **46**(5): 180273

## 1 引言

横向剪切干涉仪<sup>[1-4]</sup>通过剪切干涉获得的干涉条纹信息,再通过 Fourier 分析处理得到波前梯度的近似分布,在自适应光学系统中<sup>[5]</sup>,横向剪切干涉仪是一种重要的波前传感器,因其系统简洁稳定而受到广泛应用<sup>[6]</sup>。从波前梯度信息出发,可通过区域法<sup>[4]</sup>、模式法<sup>[1-3]</sup>等方式复原波前信息。模式法将波前展开为正交的基函数的线性组合,因此获取了各阶模式系数也就复原了波前信息。

单位圆上常用的模式为 Zernike 圆多项式。横向剪切干涉仪中的 Zernike 模式复原是基于由 Rimmer 和 Wyant 建立的关于 Zernike 各阶模式的超定矩阵方程,称为 Rimmer-Wyant 方法<sup>[1]</sup>。通过求超定方程在最小二乘意义下的解,获得各阶 Zernike 模式的系数,其矩阵方程与 Shack-Hartmann 波前传感器的模式复原的矩阵方程有相同结构<sup>[7-9]</sup>,区别仅在于方程的向量数目。该方法的缺点是存在模式耦合现象<sup>[7,10-14]</sup>,即,复原模式的截断数  $J$  小于实际波前的模式数  $M_{act}$  时,最小二乘法得到的模式系数不准确。但实际波前的模式数不能先验地预测,为了获得准确的 Zernike 系数,需要设法避免耦合误差。耦合误差的原因本质上是 Zernike 圆多项式的梯度并不正交<sup>[7,10-14]</sup>,要规避耦合误差需要从正交性的角度进行考虑。

通常考虑的克服耦合误差的方法是构造辅助的向量函数<sup>[15]</sup>,使其正交于 Zernike 圆多项式的梯度,复原时用梯度数据与向量函数各阶模式联立在圆域求积分,在该积分定义的内积下向量函数各阶模式与 Zernike 圆多项式各阶相应模式正交,因此可以无耦合地得到模式系数的准确值,即是说,即便复原截断数没有达到实际波前模式数,也可获得正确的复原系数,从而避免耦合现象。合适的向量函数并不唯一,有若干相关文献对此进行了讨论<sup>[15-18]</sup>。

另一种思路是采用梯度正交的模式取代 Zernike 圆多项式进行复原,Huang 等采用了 Laplace 算子本征函数进行模式复原<sup>[12-14]</sup>,单位圆上该函数为圆谐函数,其径向函数是 Bessel 函数。由于任何单阶的 Bessel 函数都是幂函数的无穷级数,各阶 Bessel 函数与 Zernike 径向多项式互相都是无穷级数展开。因此,单阶 Zernike 圆多项式需要用无穷阶圆谐函数展开,并无简单的关系。

本文考虑一种更简洁的方法,当采样点数较高时,直接利用 Zernike 圆多项式角向导数和径向导数的正交性质,通过 Gram 矩阵方法,无耦合地获得 Zernike 系数。该复原不需要构造复杂的辅助向量函数。该方法可方便地推广到环上,得到无耦合的 Zernike 环多项式系数。

## 2 基于 Gram 矩阵方程的 Zernike 模式复原方法

### 2.1 Gram 矩阵方法

文献[19]中提出可用一种含 Gram 矩阵的矩阵方程进行波前复原,其形式如下:

$$\begin{bmatrix} ((\frac{\partial W}{\partial \rho})_{meas}, \frac{\partial Z_1}{\partial \rho}) \\ ((\frac{\partial W}{\partial \rho})_{meas}, \frac{\partial Z_2}{\partial \rho}) \\ \vdots \\ ((\frac{\partial W}{\partial \rho})_{meas}, \frac{\partial Z_J}{\partial \rho}) \end{bmatrix} = \mathbf{G} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_J \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\frac{\partial Z_1}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_1}{\partial \rho}) & (\frac{\partial Z_1}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_2}{\partial \rho}) & \dots & (\frac{\partial Z_1}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_J}{\partial \rho}) \\ (\frac{\partial Z_2}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_1}{\partial \rho}) & (\frac{\partial Z_2}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_2}{\partial \rho}) & \dots & (\frac{\partial Z_2}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_J}{\partial \rho}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\frac{\partial Z_J}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_1}{\partial \rho}) & (\frac{\partial Z_J}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_2}{\partial \rho}) & \dots & (\frac{\partial Z_J}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_J}{\partial \rho}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_J \end{bmatrix}, (1)$$

其中： $(\frac{\partial W}{\partial \rho})_{meas}$  为波前径向导数的测量值， $Z_j$  表示

Zernike 模式， $\alpha_j$  为待求模式系数。 $G$  是一个 Gram 矩阵，其元素由待求向量(即待求函数，此处为 Zernike 模式的径向导数)的内积  $G_{jj}$  组成：

$$G_{jj} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 w(\rho) \frac{\partial Z_j}{\partial \rho} \frac{\partial Z_j}{\partial \rho} \rho d\rho d\theta, \quad (2)$$

其中  $w(\rho)$  为一合适的权重函数，当内积取为欧式内积时， $w(\rho) = \rho$ 。由代数定理<sup>[20]</sup>，Gram 矩阵为非奇异矩阵当且仅当组成 Gram 矩阵的向量线性无关。由于此时组成 Gram 矩阵的向量  $\left\{ \frac{\partial Z_j}{\partial \rho} \right\}$  线性无关，不论权重

函数  $w(\rho)$  如何选取，一定会给出唯一的解。

文献[19]中讨论到，如果组成 Gram 矩阵的向量关于权重函数  $w(\rho)$  不正交，那么当复原模式的截断数  $J$  小于实际波前的模式数  $M_{act}$  时，Gram 矩阵方法不会给出准确值，这是 Gram 矩阵方法中的“耦合”现象。但如果组成 Gram 矩阵的向量关于式(2)中的权重函数  $w(\rho)$  正交，则  $G$  成为对角矩阵，“耦合”现象消失<sup>[19]</sup>。

这意味着，假如采用欧式内积构成的 Gram 矩阵进行 Zernike 模式复原，由于 Zernike 圆多项式的径向导数互相线性无关，Gram 矩阵方法会给出唯一解，但由于 Zernike 圆多项式的径向导数在欧式内积下并不完全正交，依然会出现“耦合”误差。因此，需要考虑利用角向导数的正交性。

### 2.2 Zernike 圆多项式角向导数的正交性

本文中 Zernike 圆多项式定义如下<sup>[21]</sup>：

$$Z_n^m(\rho, \theta) = \begin{cases} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} R_n^{|m|}(\rho) \sqrt{2} \cos(|m|\theta) & (m > 0) \\ \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} R_n^{|m|}(\rho) \sqrt{2} \sin(|m|\theta) & (m < 0), \\ \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} R_n^0(\rho) & (m = 0) \end{cases} \quad (3)$$

其中： $n = 0, 1, 2, \dots$ ； $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ； $n - m$  为偶数。注意上式的归一化因子与文献[21]中不完全相同。当方位频率  $m > 0$  时，Zernike 径向多项式  $R_n^m(\rho)$  为

$$R_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left(\frac{n-m}{2} - s\right)! \left(\frac{n+m}{2} - s\right)!} \rho^{n-2s} \quad (4)$$

Zernike 圆多项式模式间有正交关系：

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho Z_n^m(\rho, \theta) Z_{n'}^{m'}(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (5)$$

由 Zernike 圆多项式的定义不难得到 Zernike 圆多

项式的角向导数：

$$\frac{\partial Z_n^m(\rho, \theta)}{\partial \theta} = \begin{cases} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} R_n^{|m|}(\rho) \sqrt{2} \cos(|m|\theta) \cdot (-|m|) & (m > 0) \\ \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} R_n^{|m|}(\rho) \sqrt{2} \sin(|m|\theta) \cdot (-|m|) & (m < 0), \\ 0 & (m = 0) \end{cases} \quad (6)$$

由此不难得到 Zernike 圆多项式的角向导数的正交性：

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho \frac{\partial Z_n^m(\rho, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial Z_{n'}^{m'}(\rho, \theta)}{\partial \theta} \rho d\rho d\theta = m^2 \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (7)$$

因此，由 Zernike 圆多项式的角向导数和波前的角向导数建立的 Gram 矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} \left( \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_{meas}, \frac{\partial Z_1}{\partial \theta} \right) \\ \left( \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_{meas}, \frac{\partial Z_2}{\partial \theta} \right) \\ \vdots \\ \left( \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_{meas}, \frac{\partial Z_J}{\partial \theta} \right) \end{bmatrix} = \mathbf{G} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_J \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial Z_1}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_1}{\partial \theta} \right) & \left( \frac{\partial Z_1}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_2}{\partial \theta} \right) & \dots & \left( \frac{\partial Z_1}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_J}{\partial \theta} \right) \\ \left( \frac{\partial Z_2}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_1}{\partial \theta} \right) & \left( \frac{\partial Z_2}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_2}{\partial \theta} \right) & \dots & \left( \frac{\partial Z_2}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_J}{\partial \theta} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left( \frac{\partial Z_J}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_1}{\partial \theta} \right) & \left( \frac{\partial Z_J}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_2}{\partial \theta} \right) & \dots & \left( \frac{\partial Z_J}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_J}{\partial \theta} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_J \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中内积取为欧式内积，即  $w(\rho) = \rho$ 。由 Zernike 角向导数的正交关系，可得到无耦合的 Zernike 复原系数。

但该方法需要补充考虑的一点是  $m=0$  的 Zernike 模式角向导数为零，无法用 Gram 矩阵方法测量，需要用  $m=0$  模式径向导数的 Gram 矩阵单独复原，但这些模式在欧式内积下并不正交，需要对内积做出改变，下面我们来证明， $m=0$  的 Zernike 模式的径向导数在极坐标中关于权重函数  $w(\rho) = \rho(1 - \rho^2)$  正交。

### 2.3 Zernike 圆多项式中 $m=0$ 的项径向导数的正交性

Zernike 圆多项式中  $m=0$  的项可表示为<sup>[22-23]</sup>

$$R_n^0(\rho) = (-1)^{\frac{n}{2}} G_{\frac{n}{2}}^1(1, 1, \rho^2) \quad (9)$$

其中  $n$  只能取偶数， $G_n(p, q, \rho)$  为次数为  $n$  的 Jacobi 多项式， $p$  和  $q$  为权重函数参数且满足  $q > 0, p - q > -1$ ，并有正交关系<sup>[23-24]</sup>：

$$\int_0^1 \rho^{q-1} (1-\rho)^{p-q} G_n(p, q, \rho) G_{n'}(p, q, \rho) d\rho = N_n(p, q) \delta_{nn'}, \quad (10)$$

其中  $N_n(p, q)$  为归一化系数：

$$N_n(p, q) = \frac{[\Gamma(q)]^2 \Gamma(p+n-q+1)}{\Gamma(p+n)\Gamma(q+n)} \frac{n!}{p+2n}, \quad (11)$$

式中  $\Gamma$  表示熟知的 Gamma 函数。

由 Jacobi 多项式的微分公式<sup>[25]</sup>可得：

$$\frac{d}{d\rho} [R_n^0(\rho)] = (-1)^{\frac{1}{2}n+1} \frac{n(n+2)}{2} \rho G_{\frac{1}{2}n-1}(3, 2, \rho^2). \quad (12)$$

由式(10)中的 Jacobi 多项式的正交关系可得到如下的正交关系：

$$\int_0^1 (1-\rho^2) \frac{d[R_n^0(\rho)]}{d\rho} \frac{d[R_{n'}^0(\rho)]}{d\rho} d(\rho^2) = N_{\frac{1}{2}n-1}(3, 2) \frac{n^2(n+2)^2}{4} \delta_{nn'}. \quad (13)$$

整理可得 Zernike 模式  $m=0$  项径向多项式的导数的正交性：

$$\int_0^1 \rho(1-\rho^2) \frac{d[R_n^0(\rho)]}{d\rho} \frac{d[R_{n'}^0(\rho)]}{d\rho} d\rho = \frac{n(n+2)}{2(n+1)} \delta_{nn'}. \quad (14)$$

考虑到三角函数系的正交性，可得(归一化的)Zernike 圆多项式中  $m=0$  的项径向导数的正交性：

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho(1-\rho^2) \frac{\partial}{\partial \rho} Z_n^0(\rho, \theta) \frac{\partial}{\partial \rho} Z_{n'}^0(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = n(n+2) \delta_{0m} \delta_{nn'}. \quad (15)$$

从上式可看出，在权重函数  $w(\rho) = \rho(1-\rho^2)$  下，Zernike 圆多项式中  $m=0$  的项径向导数互相正交，且与  $m \neq 0$  项的径向导数正交。所以可利用 Gram 矩阵方程对 Zernike 圆多项式中  $m=0$  的项进行复原，其中内积加权重函数  $w(\rho) = \rho(1-\rho^2)$ ，由此可得到  $m=0$  的项的无耦合的 Zernike 复原系数。

### 2.4 复原流程

下面总结一下复原流程：首先，从波前的梯度数据  $(\frac{\partial W}{\partial x})_{\text{meas}}$  和  $(\frac{\partial W}{\partial y})_{\text{meas}}$ ，通过如下公式转换得到波前的径向导数和角向导数：

$$(\frac{\partial W}{\partial \rho})_{\text{meas}}(\rho, \theta) = (\frac{\partial W}{\partial x})_{\text{meas}} \cos \theta + (\frac{\partial W}{\partial y})_{\text{meas}} \sin \theta, \quad (16)$$

$$(\frac{\partial W}{\partial \theta})_{\text{meas}}(\rho, \theta) = -(\frac{\partial W}{\partial x})_{\text{meas}} \rho \sin \theta + (\frac{\partial W}{\partial y})_{\text{meas}} \rho \cos \theta, \quad (17)$$

然后，用矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} ((\frac{\partial W}{\partial \theta})_{\text{meas}}, \frac{\partial Z_1}{\partial \theta}) \\ ((\frac{\partial W}{\partial \theta})_{\text{meas}}, \frac{\partial Z_2}{\partial \theta}) \\ \vdots \\ ((\frac{\partial W}{\partial \theta})_{\text{meas}}, \frac{\partial Z_J}{\partial \theta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{\partial Z_1}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_1}{\partial \theta}) & (\frac{\partial Z_1}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_2}{\partial \theta}) & \dots & (\frac{\partial Z_1}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_J}{\partial \theta}) \\ (\frac{\partial Z_2}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_1}{\partial \theta}) & (\frac{\partial Z_2}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_2}{\partial \theta}) & \dots & (\frac{\partial Z_2}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_J}{\partial \theta}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\frac{\partial Z_J}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_1}{\partial \theta}) & (\frac{\partial Z_J}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_2}{\partial \theta}) & \dots & (\frac{\partial Z_J}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_J}{\partial \theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_J \end{bmatrix}, \quad (18)$$

复原  $m \neq 0$  项的 Zernike 系数，权重函数取  $w(\rho) = \rho$ ，在直角坐标系做数值积分时，考虑到极坐标和直角坐标转换的 Jacobi 行列式，权重函数  $w(\rho) = 1$ 。

最后，用矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} ((\frac{\partial W}{\partial \rho})_{\text{meas}}, \frac{\partial Z_1}{\partial \rho}) \\ ((\frac{\partial W}{\partial \rho})_{\text{meas}}, \frac{\partial Z_2}{\partial \rho}) \\ \vdots \\ ((\frac{\partial W}{\partial \rho})_{\text{meas}}, \frac{\partial Z_J}{\partial \rho}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{\partial Z_1}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_1}{\partial \rho}) & (\frac{\partial Z_1}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_2}{\partial \rho}) & \dots & (\frac{\partial Z_1}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_J}{\partial \rho}) \\ (\frac{\partial Z_2}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_1}{\partial \rho}) & (\frac{\partial Z_2}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_2}{\partial \rho}) & \dots & (\frac{\partial Z_2}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_J}{\partial \rho}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\frac{\partial Z_J}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_1}{\partial \rho}) & (\frac{\partial Z_J}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_2}{\partial \rho}) & \dots & (\frac{\partial Z_J}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_J}{\partial \rho}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_J \end{bmatrix}, \quad (19)$$

复原  $m=0$  项的 Zernike 系数(活塞项除外)，权重函数取  $w(\rho) = \rho(1-\rho^2)$ ，在直角坐标系做数值积分时，考虑到极坐标和直角坐标转换的 Jacobi 行列式，权重函数  $w(\rho) = 1-\rho^2$ 。

### 3 复原结果

由于在式(3)中采用了归一化的 Zernike 模式，当复原截断数  $J$  大于等于实际波前模式数  $M_{\text{act}}$  时，文献[14]中定义的波前复原误差  $\lambda$  可化简为

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{M_{\text{act}}} (\alpha_i^2 - \beta_i^2) + \sum_{M_{\text{act}}+1}^J \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^{M_{\text{act}}} \beta_i^2}, \quad (20)$$

其中： $\alpha_i$  是复原系数， $\beta_i$  是实际波前系数。

当复原截断数  $J$  小于等于实际波前模式数  $M_{\text{act}}$  时，

文献中定义的波前复原误差  $\lambda$  可化简为

$$\lambda = \lambda_r + \lambda_t = \frac{\sum_1^J (\alpha_i^2 - \beta_i^2) + \sum_{J+1}^{M_{act}} \alpha_i^2}{\sum_1^{M_{act}} \beta_i^2}, \quad (21)$$

其中  $\lambda_r$  为残差：

$$\lambda_r = \frac{\sum_1^J (\alpha_i^2 - \beta_i^2)}{\sum_1^{M_{act}} \beta_i^2}. \quad (22)$$

当采样率高到模式混淆可以忽略时， $\lambda_r$  可以衡量模式耦合，原因是这时  $\lambda_r$  反映了复原截断数  $J$  以下系数的复原准确程度。当截断数  $J$  变化时，如  $\lambda_r$  始终保持很小，则表明耦合误差消除。

$\lambda_t$  为截断误差：

$$\lambda_t = \frac{\sum_{J+1}^{M_{act}} \alpha_i^2}{\sum_1^{M_{act}} \beta_i^2}. \quad (23)$$

原始波前设为前 21 阶 Zernike 圆多项式(不含活塞项)，实际波前模式系数设为  $\beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_{21} = 1$ 。根据剪切干涉测量的典型采样点数目，取采样点数  $\pi \times 100^2 \approx 3.1 \times 10^4$ 。

图 1 显示了运用本文所述式(18)与式(19)的 Gram 矩阵方法时，波前复原误差  $\lambda$  和残差  $\lambda_r$  与截断数  $J$  的关系。 $\lambda$  的变化曲线表明，如同上文讨论的，当  $J$  大于等于实际波前模式数  $M_{act}=21$  时，Gram 矩阵方法可以给出准确的复原。 $\lambda_r$  的变化曲线表明，当  $J$  小于等于实际波前模式数  $M_{act}=21$  时，残差  $\lambda_r$  很小，波前复原误差几乎都来自截断误差，耦合误差得到消除。

图 2 显示了运用式(1)Gram 矩阵方法时，波前复

原误差  $\lambda$  和残差  $\lambda_r$  与截断数  $J$  的关系，其中内积取为欧式内积，即权重函数  $w(\rho)=\rho$ 。 $\lambda$  的变化曲线表明，如同上文讨论的，当  $J$  大于等于实际波前模式数  $M_{act}=21$  时，Gram 矩阵方法可以给出准确的复原。 $\lambda_r$  的变化曲线表明，当  $J$  小于等于实际波前模式数  $M_{act}=21$  时，出现较大的残差，这是文献[19]中讨论到的 Gram 矩阵方法中的“耦合”现象。图 1 和图 2 的复原结果的对比表明，可通过利用 Zernike 圆多项式  $m \neq 0$  项角向导数的正交性，和 Zernike 圆多项式  $m=0$  项径向导数的加权正交性，无耦合地复原模式系数。

图 3 显示了运用本文所述 Gram 矩阵方法，当截断数  $J$  达到实际波前模式数时波前重构结果。

下面考虑一个实测例子，应用四波横向剪切干涉系统检测一实际波前，该波前经过带有球差的像差板调制，由于实际复原口径比像差板略小，存在一个标度变换，复原区域的波前应当是一个 Zernike 球差  $Z_4^0$ 、离焦  $Z_2^0$  与活塞项  $Z_0^0$  的线性组合。由图 4 所示的数值化的干涉条纹经 Fourier 分析处理得到波前梯度的近似分布，再用本文所述方法进行模式复原。

尽管实验涉及的像差板阶数只到 4 阶，但只需进行这样的复原，一次复原截断的阶数为 4 阶(Zernike 球差)，一次复原截断的阶数为 2 阶(Zernike 离焦)，然后对比两次复原时 Zernike 离焦项  $Z_2^0$  的系数，即可说明本文的问题。如果两次复原系数差别很小，说明耦合得到避免，如果复原系数差别较大，说明存在耦合。

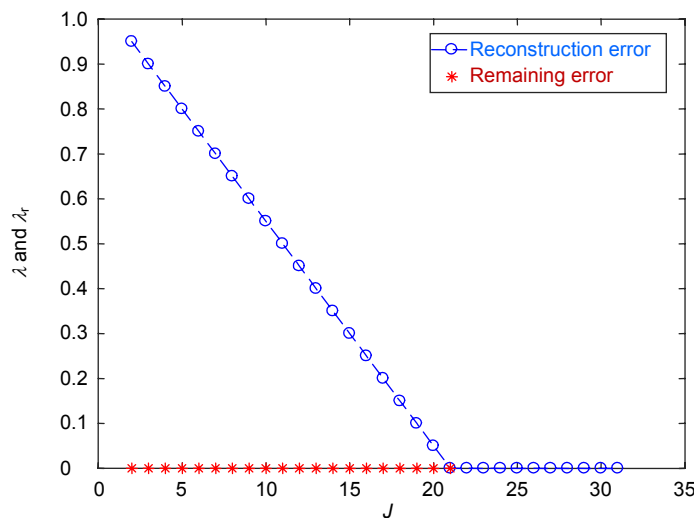


图 1 波前复原误差  $\lambda$  和残差  $\lambda_r$  与截断数  $J$  的关系，运用本文所述式(18)与式(19)的 Gram 矩阵方法  
Fig. 1 Reconstruction error  $\lambda$  and remaining error  $\lambda_r$  versus truncation of reconstruction modes  $J$ , by Gram matrix method in Eq.(18) and Eq.(19)



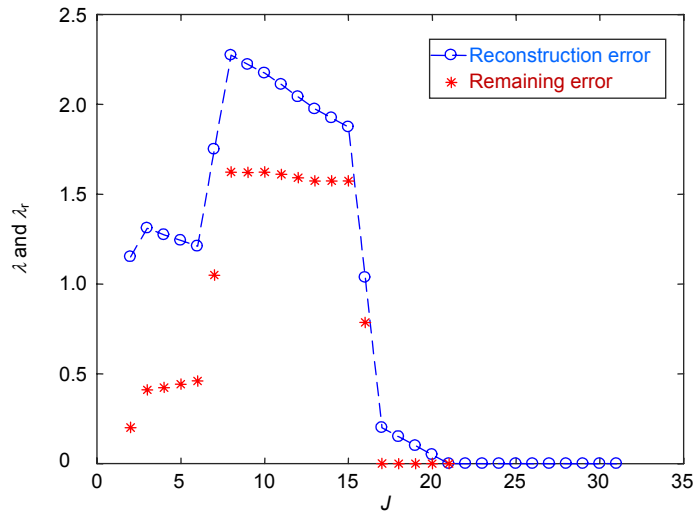


图 2 波前复原误差 $\lambda$ 和残差 $\lambda_r$ 与截断数 $J$ 的关系, 运用式(1) Gram 矩阵方法, 权重函数 $w(\rho)=\rho$  (极坐标)  
 Fig. 2 Reconstruction error  $\lambda$  and remaining error  $\lambda_r$  versus truncation of reconstruction modes  $J$ , by Gram matrix method in Eq.(1),  $w(\rho)=\rho$  (polar coordinate)

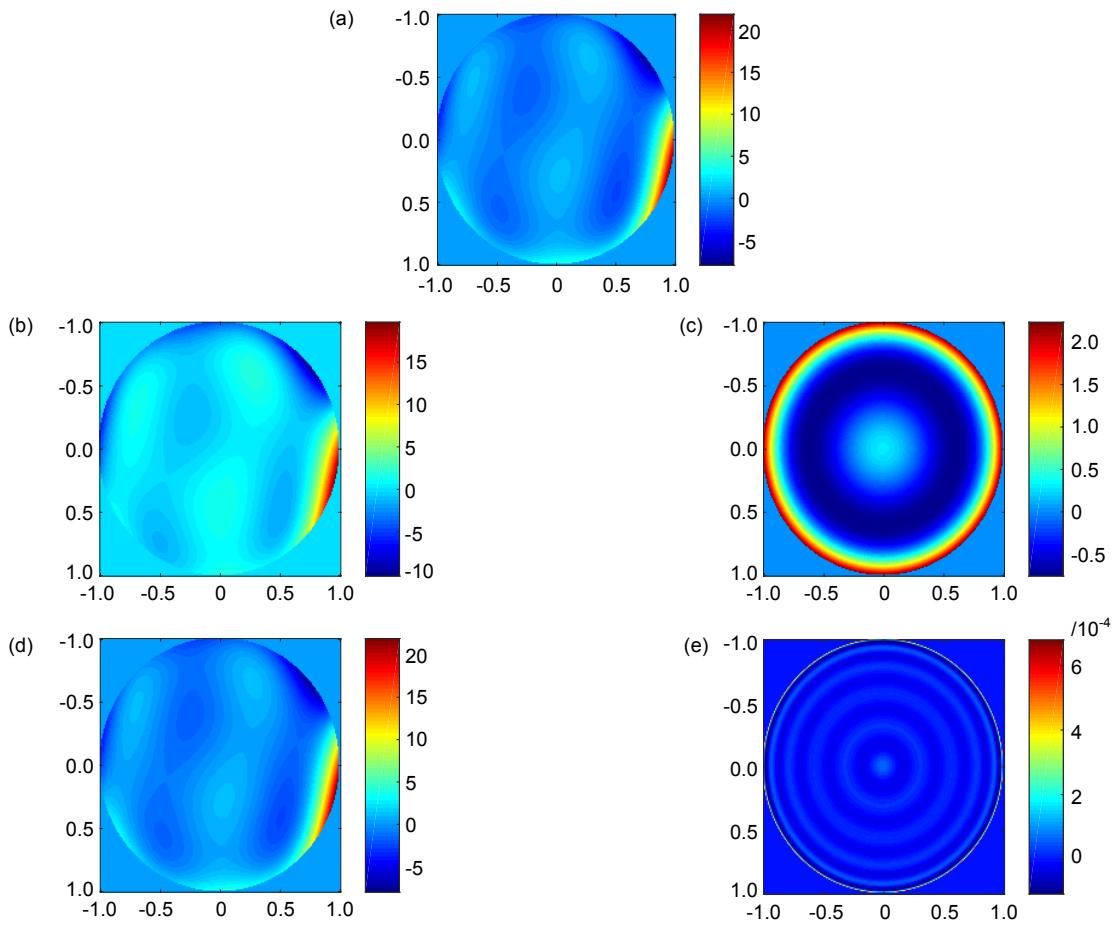


图 3 波前复原结果。(a) 原始波前; (b) 式(18)复原的 $m \neq 0$ 项的波前; (c) 式(19)复原的 $m=0$ 项的波前; (d) 复原波前; (e) 复原残留误差

Fig. 3 Reconstruction results. (a) Original wavefront; (b) Reconstructed wavefront by Eq.(18), including  $m \neq 0$  modes; (c) Reconstructed wavefront by Eq.(19), including  $m=0$  modes; (d) Reconstructed wavefront; (e) Residual error

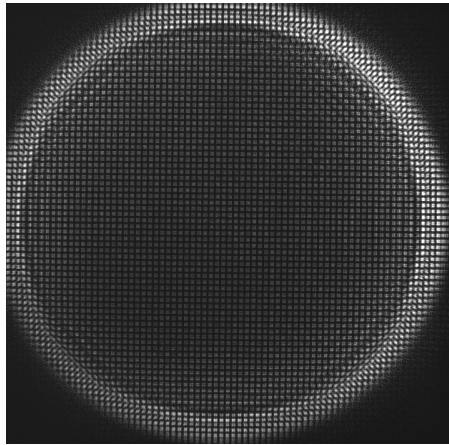


图 4 数值化的干涉条纹  
Fig. 4 Numerical interferogram

图 5 显示了运用式(19)和式(1)Gram 矩阵方法时, Zernike 离焦项  $Z_2^0$  的复原波前在截断数为 4 和 2 时的变化关系。可以看出, 运用本文所述式(19)复原时, Zernike 离焦项  $Z_2^0$  的复原结果在截断数变化时差别很小, 耦合得到避免, 而采用式(1)复原时, 当截断数小于实际波前阶数时, 存在明显的耦合现象。

### 4 环上推广

本节考虑上述 Gram 矩阵方法在环上的推广, 采用在环上正交的 Zernike 环多项式展开波前函数, 并试图利用正交性得到无耦合的 Zernike 环多项式系数。

#### 4.1 Zernike 环多项式角向导数的正交性

本文中 Zernike 环多项式定义在外环半径为 1, 内环半径为  $\varepsilon$  的环上, 定义如下<sup>[26]</sup>:

$$Z_n^m(\rho, \theta; \varepsilon) = \begin{cases} \sqrt{\frac{n+1}{\pi(1-\varepsilon^2)}} R_n^{|m|}(\rho; \varepsilon) \sqrt{2} \cos(|m|\theta) & (m > 0) \\ \sqrt{\frac{n+1}{\pi(1-\varepsilon^2)}} R_n^{|m|}(\rho; \varepsilon) \sqrt{2} \sin(|m|\theta) & (m < 0), (24) \\ \sqrt{\frac{n+1}{\pi(1-\varepsilon^2)}} R_n^0(\rho; \varepsilon) & (m = 0) \end{cases}$$

其中:  $n=0,1,2,\dots$ ;  $m=0,\pm 1,\pm 2,\dots$ ;  $n-m$  为偶数。注意上式的归一化因子与文献[26]中不完全相同。当方位频率  $m>0$  时, Zernike 环多项式的径向多项式  $R_n^m(\rho; \varepsilon)$  由对 Zernike 圆多项式的径向多项式  $R_n^m(\rho)$  做 Gram-Schmidt 正交化, 递归地给出, 一般并无统一的幂函数显表达式。  $R_n^m(\rho; \varepsilon)$  的递归表达式如下:

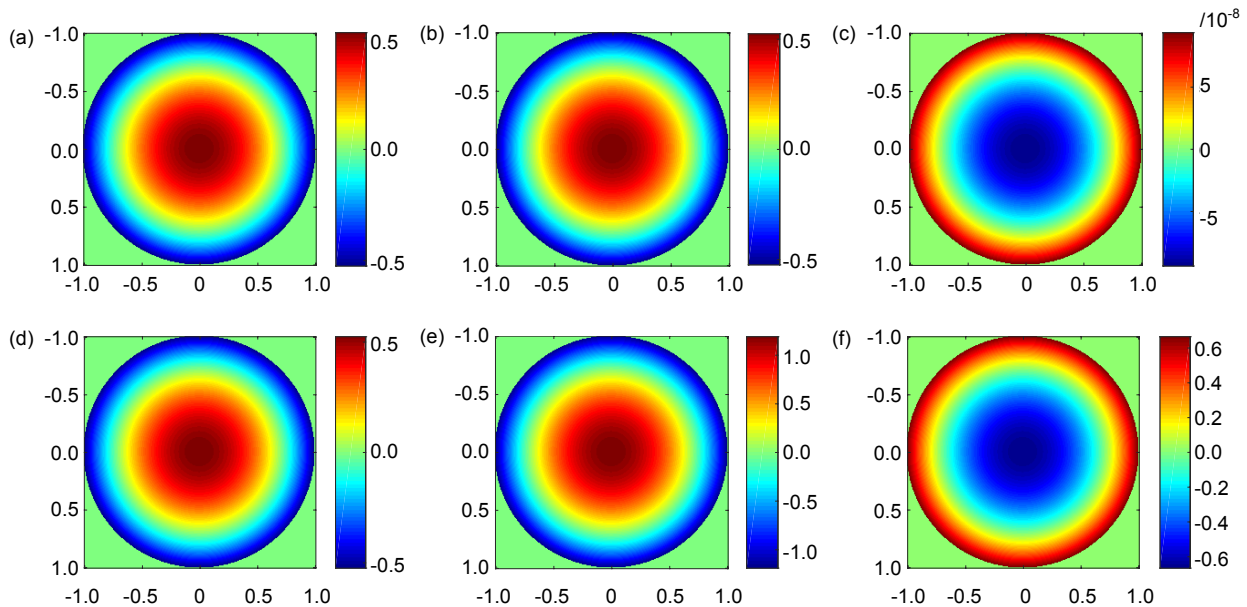


图 5 波前复原结果。运用本文所述式(19)的 Gram 矩阵方法。(a) Zernike 离焦项  $Z_2^0$  的复原波前, 截断数  $J=4$ ; (b) Zernike 离焦项  $Z_2^0$  的复原波前, 截断数  $J=2$ ; (c) 复原残留误差原。运用式(1)的 Gram 矩阵方法: (d) Zernike 离焦项  $Z_2^0$  的复原波前, 截断数  $J=4$ ; (e) Zernike 离焦项  $Z_2^0$  的复原波前, 截断数  $J=2$ ; (f) 复原残留误差原  
Fig. 5 Reconstruction results by Gram matrix method in Eq.(19). (a) Reconstructed wavefront of  $Z_2^0$ , where truncation number  $J=4$ ; (b) Reconstructed wavefront of  $Z_2^0$ , where truncation number  $J=2$ ; (c) Residual error. Reconstruction results by Gram matrix method in Eq.(1); (d) Reconstructed wavefront of  $Z_2^0$ , where truncation number  $J=4$ ; (e) Reconstructed wavefront of  $Z_2^0$ , where truncation number  $J=2$ ; (f) Residual error

$$R_n^m(\rho; \varepsilon) = N_n^m \left[ R_n^m(\rho) - \sum_{i=1}^{(n-m)/2} \frac{2(n-2i+1)}{1-\varepsilon^2} R_{n-2i}^m(\rho; \varepsilon) \int_0^1 \rho R_n^m(\rho) R_{n-2i}^m(\rho; \varepsilon) d\rho \right], \quad (25)$$

其中： $N_n^m$  为每次 Gram-Schmidt 正交化步骤中的归一化因子。

Zernike 环多项式模式间有正交关系：

$$\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon} \rho Z_n^m(\rho, \theta; \varepsilon) Z_{n'}^{m'}(\rho, \theta; \varepsilon) d\rho d\theta = \delta_{mm'} \delta_{nn'}. \quad (26)$$

由 Zernike 环多项式的定义不难得到 Zernike 环多项式的角向导数：

$$\frac{\partial Z_n^m(\rho, \theta; \varepsilon)}{\partial \theta} = \begin{cases} \sqrt{\frac{n+1}{\pi(1-\varepsilon^2)}} R_n^{|m|}(\rho; \varepsilon) \sqrt{2} \cos(|m|\theta) \cdot (-|m|) & (m > 0) \\ \sqrt{\frac{n+1}{\pi(1-\varepsilon^2)}} R_n^{|m|}(\rho; \varepsilon) \sqrt{2} \sin(|m|\theta) \cdot (-|m|) & (m < 0) \\ 0 & (m = 0) \end{cases}, \quad (27)$$

由此不难得到 Zernike 环多项式的角向导数的正交性：

$$\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon} \rho \frac{\partial Z_n^m(\rho, \theta; \varepsilon)}{\partial \theta} \frac{\partial Z_{n'}^{m'}(\rho, \theta; \varepsilon)}{\partial \theta} d\rho d\theta = m^2 \delta_{mm'} \delta_{nn'}. \quad (28)$$

因此，由 Zernike 环多项式的角向导数和波前的角向导数建立的 Gram 矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_{\text{meas}}, \frac{\partial Z_1}{\partial \theta} \\ \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_{\text{meas}}, \frac{\partial Z_2}{\partial \theta} \\ \vdots \\ \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_{\text{meas}}, \frac{\partial Z_J}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \mathbf{G} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_J \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial Z_1}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_1}{\partial \theta} \right) & \left( \frac{\partial Z_1}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_2}{\partial \theta} \right) & \dots & \left( \frac{\partial Z_1}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_J}{\partial \theta} \right) \\ \left( \frac{\partial Z_2}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_1}{\partial \theta} \right) & \left( \frac{\partial Z_2}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_2}{\partial \theta} \right) & \dots & \left( \frac{\partial Z_2}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_J}{\partial \theta} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left( \frac{\partial Z_J}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_1}{\partial \theta} \right) & \left( \frac{\partial Z_J}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_2}{\partial \theta} \right) & \dots & \left( \frac{\partial Z_J}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_J}{\partial \theta} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_J \end{bmatrix}, \quad (29)$$

其中内积取为欧式内积，即在极坐标下  $w(\rho)=\rho$ 。由 Zernike 角向导数的正交关系，可得到无耦合的 Zernike 复原系数。

但该方法需要补充考虑的一点是， $m=0$  的 Zernike 模式角向导数为零，无法用 Gram 矩阵方法测量，需要用  $m=0$  模式径向导数的 Gram 矩阵单独复原，但这

些模式在欧式内积下并不正交，需要对内积做出改变，接下来将证明， $m=0$  的 Zernike 环多项式的径向导数在极坐标中关于权重函数  $w(\rho)=(\rho^2-\varepsilon^2)(1-\rho^2)/\rho$  正交。

#### 4.2 Zernike 环多项式中 $m=0$ 的项径向导数的正交性

Zernike 环多项式中  $m=0$  的项的径向多项式有显表达式<sup>[26]</sup>：

$$R_n^0(\rho; \varepsilon) = R_n^0 \left( \sqrt{\frac{\rho^2 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}} \right). \quad (30)$$

令： $\kappa = \frac{\rho^2 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}$ ， $\gamma = \frac{1 - \rho^2}{1 - \varepsilon^2}$ 。将上式代入式(9)，可得：

得：

$$R_n^0(\rho; \varepsilon) = (-1)^{\frac{n}{2}} G_n(1, 1, \kappa). \quad (31)$$

由 Jacobi 多项式的微分公式<sup>[20]</sup>可得：

$$\frac{d[R_n^0(\rho; \varepsilon)]}{d\rho} = (-1)^{\frac{1}{2}n+1} \frac{n(n+2)}{2} \frac{\rho}{1-\varepsilon^2} G_{\frac{1}{2}n-1}(3, 2, \kappa). \quad (32)$$

由式(10)中的 Jacobi 多项式的正交关系可得到如下正交关系：

$$\int_0^1 \kappa \cdot \gamma \cdot G_{\frac{1}{2}n-1}(3, 2, \kappa) G_{\frac{1}{2}n'-1}(3, 2, \kappa) d\kappa = N_{\frac{1}{2}n-1}(3, 2) \delta_{nn'}. \quad (33)$$

将式(32)代入式(33)并整理，注意自变量的变换造成积分区域的变换，可得 Zernike 环多项式  $m=0$  项径向多项式的导数的正交性：

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{(\rho^2 - \varepsilon^2)(1 - \rho^2)}{\rho} \frac{d[R_n^0(\rho; \varepsilon)]}{d\rho} \frac{d[R_{n'}^0(\rho; \varepsilon)]}{d\rho} d\rho = (1 - \varepsilon^2) \frac{n(n+2)}{2(n+1)} \delta_{nn'}. \quad (34)$$

考虑到三角函数系的正交性，可得(归一化的)Zernike 环多项式中  $m=0$  的项径向导数的正交性：

$$\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon} \frac{(\rho^2 - \varepsilon^2)(1 - \rho^2)}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} Z_n^0(\rho, \theta; \varepsilon) \frac{\partial}{\partial \rho} Z_{n'}^0(\rho, \theta; \varepsilon) d\rho d\theta = n(n+2) \delta_{0m} \delta_{nn'}. \quad (35)$$

式(35)可知，在权重函数  $w(\rho)=(\rho^2-\varepsilon^2)(1-\rho^2)/\rho$  下，Zernike 环多项式中  $m=0$  的项径向导数互相正交，且与  $m \neq 0$  项的径向导数正交。所以可利用 Gram 矩阵方程对 Zernike 环多项式中  $m=0$  的项进行复原，其中内积加权重函数  $w(\rho)=(\rho^2-\varepsilon^2)(1-\rho^2)/\rho$ ，由此可得到  $m=0$  的项的无耦合的 Zernike 环多项式复原系数。



### 4.3 复原流程

复原流程与 2.4 节基本一致：首先，从波前的梯度数据  $(\partial W / \partial x)_{\text{meas}}$  和  $(\partial W / \partial y)_{\text{meas}}$ ，通过如下式转换得到波前的径向导数和角向导数：

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)_{\text{meas}}(\rho, \theta) = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{\text{meas}} \cos \theta + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{\text{meas}} \sin \theta, \quad (36)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)_{\text{meas}}(\rho, \theta) = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{\text{meas}} \rho \sin \theta + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{\text{meas}} \rho \cos \theta, \quad (37)$$

然后，用矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)_{\text{meas}}, \frac{\partial Z_1}{\partial \theta} \\ \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)_{\text{meas}}, \frac{\partial Z_2}{\partial \theta} \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)_{\text{meas}}, \frac{\partial Z_J}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial Z_1}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_1}{\partial \theta}\right) & \left(\frac{\partial Z_1}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_2}{\partial \theta}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial Z_1}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_J}{\partial \theta}\right) \\ \left(\frac{\partial Z_2}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_1}{\partial \theta}\right) & \left(\frac{\partial Z_2}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_2}{\partial \theta}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial Z_2}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_J}{\partial \theta}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial Z_J}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_1}{\partial \theta}\right) & \left(\frac{\partial Z_J}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_2}{\partial \theta}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial Z_J}{\partial \theta}, \frac{\partial Z_J}{\partial \theta}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_J \end{bmatrix}, \quad (38)$$

复原  $m \neq 0$  项的 Zernike 环多项式系数，权重函数取  $w(\rho) = \rho$ ，在直角坐标系做数值积分时，考虑到极坐标和直角坐标转换的 Jacobi 行列式，权重函数  $w(\rho) = 1$ 。

最后，用矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)_{\text{meas}}, \frac{\partial Z_1}{\partial \rho} \\ \left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)_{\text{meas}}, \frac{\partial Z_2}{\partial \rho} \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)_{\text{meas}}, \frac{\partial Z_J}{\partial \rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial Z_1}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_1}{\partial \rho}\right) & \left(\frac{\partial Z_1}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_2}{\partial \rho}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial Z_1}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_J}{\partial \rho}\right) \\ \left(\frac{\partial Z_2}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_1}{\partial \rho}\right) & \left(\frac{\partial Z_2}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_2}{\partial \rho}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial Z_2}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_J}{\partial \rho}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial Z_J}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_1}{\partial \rho}\right) & \left(\frac{\partial Z_J}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_2}{\partial \rho}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial Z_J}{\partial \rho}, \frac{\partial Z_J}{\partial \rho}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_J \end{bmatrix}. \quad (39)$$

复原  $m=0$  项的 Zernike 环多项式系数(活塞项除外)，权重函数取  $w(\rho) = (\rho^2 - \varepsilon^2)(1 - \rho^2) / \rho$ ，在直角坐标系做数值积分时，考虑到极坐标和直角坐标转换的 Jacobi 行列式，权重函数  $w(\rho) = (\rho^2 - \varepsilon^2)(1 - \rho^2) / \rho^2$ 。

### 4.4 复原结果

原始波前设为前 21 阶 Zernike 环多项式(不含活塞项)，外环半径为 1，内环半径  $\varepsilon=0.3$ ，实际波前模式系数设为  $\beta_2=1, \beta_3=2, \beta_4=3, \dots, \beta_{21}=20$ 。根据剪切干涉测量的典型采样点数目，取采样点数  $\pi \times 100^2 - \pi \times 30^2 \approx 2.8 \times 10^4$ 。

图 6 显示了运用式(38)与式(39)的 Gram 矩阵方法时，波前复原误差  $\lambda$  和残差  $\lambda_r$  与截断数  $J$  的关系。 $\lambda$  的变化曲线表明，如同上文讨论的，当  $J$  大于等于实际波前模式数  $M_{\text{act}}=21$  时，Gram 矩阵方法可以给出准确的复原。 $\lambda_r$  的变化曲线表明，当  $J$  小于等于实际波前模式数  $M_{\text{act}}=21$  时，残差  $\lambda_r$  很小，波前复原误差几乎都来自截断误差，耦合误差得到消除。

图 7 显示了运用本文所述 Gram 矩阵方法，当截断数  $J$  达到实际波前模式数时波前重构结果。

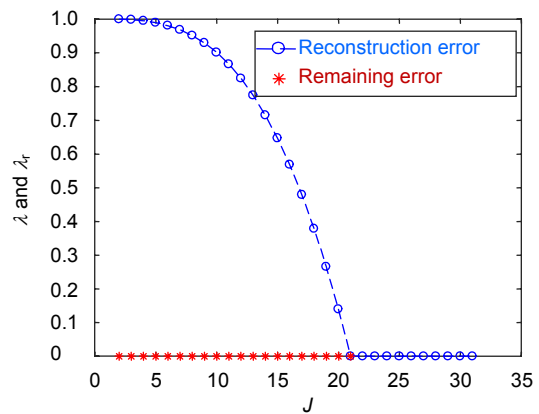


图 6 波前复原误差  $\lambda$  和残差  $\lambda_r$  与截断数  $J$  的关系  
Fig. 6 Reconstruction error  $\lambda$  and remaining error  $\lambda_r$  versus truncation of reconstruction modes  $J$

## 5 结论

基于 Gram 矩阵方法的模式复原可能存在模式耦合误差，但当构成 Gram 矩阵的向量互相正交时，Gram 矩阵对角化，即可使复原系数不受截断数目及高阶模式影响，从而消除模式耦合。我们利用了 Zernike 圆多项式  $m \neq 0$  模式角向导数的正交性，并证明 Zernike 圆多项式  $m=0$  模式径向导数在加入额外权重下的正交性，分别构成 Gram 矩阵方法中的复原矩阵方程，得到了一种简便的，从波前梯度信息无耦合复原 Zernike 系数的方法。该方法可推广到环上，得到无耦合的 Zernike 环多项式系数。

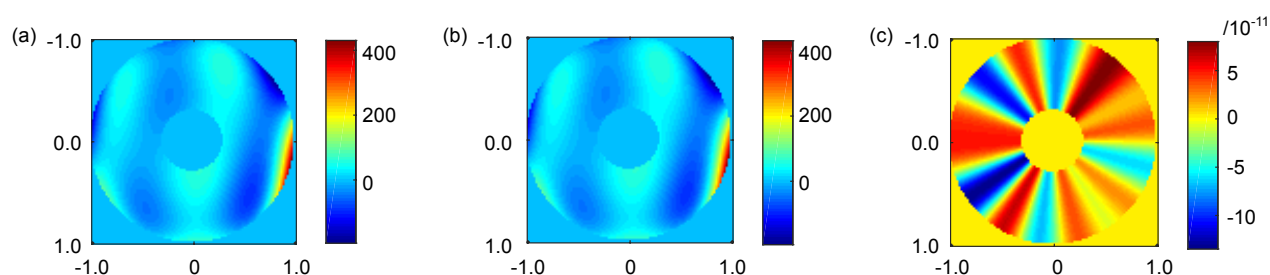


图 7 波前复原结果。(a) 原始波前; (b) 复原波前; (c) 复原残留误差

Fig. 7 Reconstruction results. (a) Original wavefront; (b) Reconstructed wavefront; (c) Residual error

## 参考文献

- [1] Rimmer M P. Method for evaluating lateral shearing interferograms[J]. *Applied Optics*, 1974, **13**(3): 623–629.
- [2] Harbers G, Kunst P J, Leibbrandt G W R. Analysis of lateral shearing interferograms by use of Zernike polynomials[J]. *Applied Optics*, 1996, **35**(31): 6162–6172.
- [3] Shen W, Chang M W, Wan D S. Zernike polynomial fitting of lateral shearing interferometry[J]. *Optical Engineering*, 1997, **36**(36): 905–913.
- [4] Hunt B R. Matrix formulation of the reconstruction of phase values from phase differences[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1979, **69**(3): 393–399.
- [5] Jiang W H. Overview of adaptive optics development[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2018, **45**(3): 170489.  
姜文汉. 自适应光学发展综述[J]. *光电工程*, 2018, **45**(3): 170489
- [6] Tyson R. *Principles of Adaptive Optics*[M]. 3rd ed. London: CRC Press, 2010: 111–176.
- [7] Zhang Q, Jiang W H, Xu B. Reconstruction of turbulent optical wavefront realized by Zernike polynomial[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 1998, **25**(6): 15–19.  
张强, 姜文汉, 许冰. 利用 Zernike 多项式对湍流波前进行波前重构[J]. *光电工程*, 1998, **25**(6): 15–19.
- [8] Xian H, Li H G, Jiang W H, et al. Measurement of the wavefront phase of a laser beam with Hartmann-Shack sensor[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 1995, **22**(2): 38–45.  
鲜浩, 李华贵, 姜文汉, 等. 用 Hartmann - Shack 传感器测量激光束的波前相位[J]. *光电工程*, 1995, **22**(2): 38–45.
- [9] Zhang R, Yang J S, Tian Y, et al. Wavefront phase recovery from the plenoptic camera[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2013, **40**(2): 32–39.  
张锐, 杨金生, 田雨, 等. 焦面哈特曼传感器波前相位复原[J]. *光电工程*, 2013, **40**(2): 32–39.
- [10] Cubalchini R. Modal wave-front estimation from phase derivative measurements[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1979, **69**(7): 972–977.
- [11] Herrmann J. Cross coupling and aliasing in modal wave-front estimation[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1981, **71**(8): 989–992.
- [12] Huang S Y, Xi F J, Liu C H, et al. Eigenfunctions of Laplacian for phase estimation from wavefront gradient or curvature sensing[J]. *Optics Communications*, 2011, **284**(12): 2781–2783.
- [13] Huang S Y, Xi F J, Liu C H, et al. Phase retrieval on annular and annular sector pupils by using the eigenfunction method to solve the transport of intensity equation[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2012, **29**(4): 513–520.
- [14] Huang S Y, Yu N, Xi F J, et al. Modal wavefront reconstruction with Zernike polynomials and eigenfunctions of Laplacian[J]. *Optics Communications*, 2013, **288**: 7–12.
- [15] Gavrielides A. Vector polynomials orthogonal to the gradient of Zernike polynomials[J]. *Optics Letters*, 1982, **7**(11): 526–528.
- [16] Zhao C Y, Burge J H. Orthonormal vector polynomials in a unit circle, Part I: basis set derived from gradients of Zernike polynomials[J]. *Optics Express*, 2007, **15**(26): 18014–18024.
- [17] Zhao C Y, Burge J H. Orthonormal vector polynomials in a unit circle, Part II: completing the basis set[J]. *Optics Express*, 2008, **16**(9): 6586–6591.
- [18] Mahajan V N, Acosta E. Vector polynomials for direct analysis of circular wavefront slope data[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2017, **34**(10): 1908–1913.
- [19] Sun W H, Wang S, He X, et al. Jacobi circle and annular polynomials: modal wavefront reconstruction from wavefront gradient[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2018, **35**(7): 1140–1148.
- [20] Horn R A, Johnson C R. *Matrix Analysis*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990: 407.
- [21] Mahajan V N. Zernike circle polynomials and optical aberrations of systems with circular pupils[J]. *Applied Optics*, 1994, **33**(34): 8121–8124.
- [22] Zernike F. Diffraction theory of the knife-edge test and its improved form, the phase-contrast method[J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2002, **94**(2): 377–384.
- [23] Born M, Wolf E. *Principles of Optics*[M]. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999: 905–910.
- [24] Wang Z X, Guo D R. *Special Functions*[M]. Singapore: World Scientific, 1989: 139, 169–173.
- [25] Andrews G E, Askey R, Roy R. *Special Functions*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999: 94.
- [26] Mahajan V N. Zernike annular polynomials and optical aberrations of systems with annular pupils[J]. *Applied Optics*, 1994, **33**(34): 8125–8127.

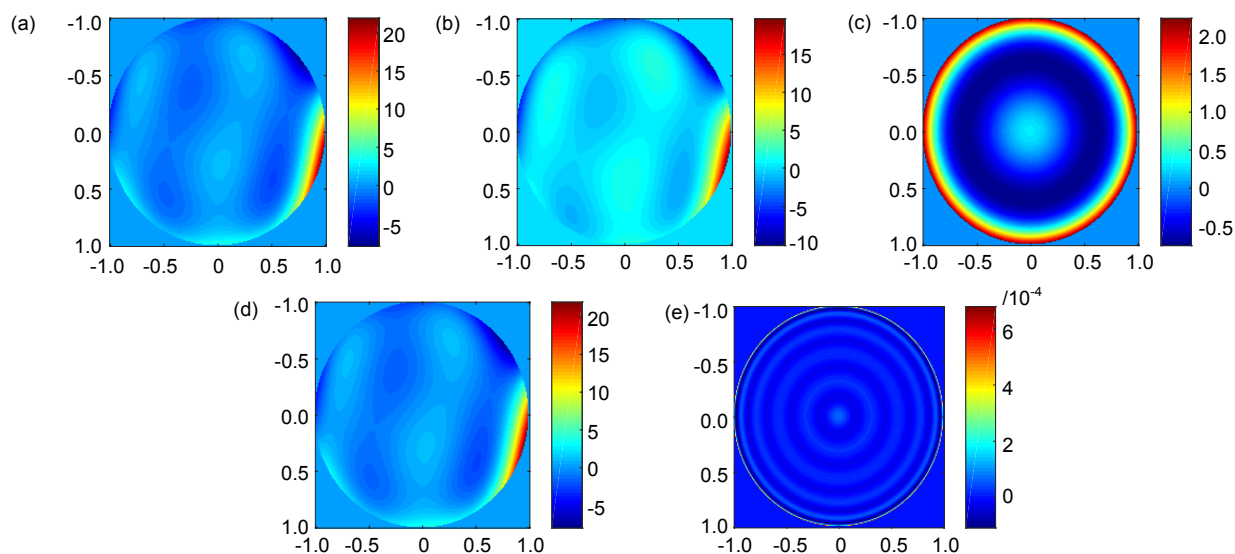
# Modal wavefront reconstruction to obtain Zernike coefficient with no cross coupling in lateral shearing measurement

Sun Wenhan<sup>1,2,3</sup>, Wang Shuai<sup>1,2\*</sup>, He Xing<sup>1,2</sup>, Chen Xiaojun<sup>1,2,3</sup>, Xu Bing<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China;

<sup>2</sup>Key Laboratory on Adaptive Optics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China;

<sup>3</sup>University of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China



Reconstruction results. (a) Original wavefront; (b) Reconstructed wavefront by Eq.(18), including  $m \neq 0$  modes; (c) Reconstructed wavefront by Eq.(19), including  $m = 0$  modes; (d) Reconstructed wavefront; (e) Residual error

**Overview:** Modal cross coupling frequently occurs in modal approaches from wavefront gradient data such as lateral shearing measurement through Zernike circle polynomials, since the gradients of Zernike circle polynomials are not orthogonal. We use a modal approach incorporating the Gram matrix, instead of least squares estimation, to reconstruct coefficients of modes for high sampling gradient measurement such as lateral shearing measurement. The matrix equation incorporating the Gram matrix has exactly one solution when the modes of the Gram matrix are linearly dependent. The matrix equation incorporating the Gram matrix has the solution without modal cross coupling when the modes of the Gram matrix are mutually orthogonal with respect to the same weight function of the Gram matrix. Using the orthogonality of angular derivative of  $m \neq 0$  modes with respect to weight function  $w(\rho) = \rho$  (polar coordinates), one can obtain Zernike coefficients of  $m \neq 0$  modes without modal cross coupling by Gram matrix method. Using the orthogonality of radial derivative of  $m = 0$  modes with respect to weight function  $w(\rho) = \rho(1 - \rho^2)$  (polar coordinates), one can obtain Zernike coefficients of  $m = 0$  modes without modal cross coupling by Gram matrix method. The Gram matrix method needs no auxiliary vector functions, and can be easily constructed and calculated. The Zernike coefficients can be obtained with no modal cross coupling. The numerical simulation results are given. Remaining error can characterize the modal cross coupling when sampling number is sufficiently high so that modal aliasing is able to be neglected. The numerical simulation result shows that the remaining error keeps very small as the truncation number  $J$  changes. The result indicates that the modal cross coupling is avoided by using Gram matrix method. This method can be easily generalized to annulus, one can obtain Zernike annular polynomial coefficients with no modal cross coupling.

**Citation:** Sun W H, Wang S, He X, *et al.* Modal wavefront reconstruction to obtain Zernike coefficient with no cross coupling in lateral shearing measurement[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2019, **46**(5): 180273

\* E-mail: wangshuai@ioe.an.cn; bingxu@ioe.ac.cn