



DOI: 10.12086/oe.2018.170617

## 大气湍流波前压缩感知测量重建研究

李 灿<sup>1</sup>, 蔡冬梅<sup>2\*</sup>, 贾 鹏<sup>2</sup>, 刘建霞<sup>1</sup>, 李娟娟<sup>2</sup><sup>1</sup> 太原理工大学信息工程学院, 山西 太原 030024;<sup>2</sup> 太原理工大学物理与光电工程学院, 山西 太原 030024

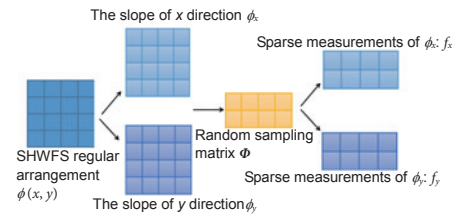
**摘要:** 压缩感知技术用于大气湍流波前斜率测量能在很大程度上提高波前信号的测量速度, 同时降低波前测量系统的硬件压力。与现有波前斜率测量方法不同, 压缩感知波前测量方法增加了从波前斜率的稀疏测量值到波前斜率信号的重建过程, 因此将压缩感知技术用于波前测量, 需要快速、高精度的波前斜率重建算法。Smoothed L0 Norm (SL0) 算法是一种近似 L0 范数估计的优化迭代重建算法, 与其它算法相比, 不需要事先知道信号的稀疏度, 计算量低且估计精度高。本文以 SL0 算法为基础, 对波前斜率信号分区域测量, 再结合并行运算, 通过理论分析和仿真实验实现了一种能够快速、高精度重建信号的分区域并行算法—Block-Smoothed L0 Norm (B-SL0)。实验结果表明, B-SL0 在计算时间和精度都明显优于现有的其它重建算法, 对压缩感知技术用于大气湍流波前测量的可行性进行了初步探索。

**关键词:** 压缩感知; 波前斜率; SL0 算法; 分区域; 并行运算

中图分类号: O439

文献标志码: A

引用格式: 李灿, 蔡冬梅, 贾鹏, 等. 大气湍流波前压缩感知测量重建研究[J]. 光电工程, 2018, 45(4): 170617



## Research on reconstruction of atmospheric turbulence wavefront compressed sensing measurement

Li Can<sup>1</sup>, Cai Dongmei<sup>2\*</sup>, Jia Peng<sup>2</sup>, Liu Jianxia<sup>1</sup>, Li Juanjuan<sup>2</sup><sup>1</sup>Institute of Information Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan, Shanxi 030024, China;<sup>2</sup>Institute of Physics and Optoelectronics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan, Shanxi 030024, China

**Abstract:** Compressed sensing technology for atmospheric turbulence wavefront slope measurement can greatly improve the wavefront signal measurement speed, while reducing the pressure of wavefront measurement system hardware. Different from the existing wavefront slope measurement method, the compressed sensing wavefront measurement increase a process which from sparse measurement of wavefront slope value to the reconstruction of the wavefront slope signal. Therefore, a fast and accurate wavefront slope reconstruction algorithm is needed if the compressed sensing technology is used for wavefront measurement. Smoothed L0 Norm (SL0) algorithm is an optimized iterative reconstruction algorithm with approximate L0 norm estimation, and compared with other algorithms, it is not necessary to know the sparsity of the signal in advance, and the calculation is low and the estimation accuracy is high. Based on the SL0 algorithm, this paper implements a subregion parallel algorithm- Block-Smoothed L0

收稿日期: 2017-11-10; 收到修改稿日期: 2018-01-21

基金项目: 国家自然科学基金青年项目(11503018); 天文联合基金项目(U1631133)

作者简介: 李灿(1993-), 女, 硕士研究生, 主要从事图像处理方面的研究。E-mail: 934892290@qq.com

通信作者: 蔡冬梅(1974-), 女, 博士, 副教授, 主要从事液晶自适应光学技术、大气湍流模拟方面的研究。E-mail: dm\_cai@163.com

Norm (B-SL0) which can quickly and accurately reconstruct the signal by measuring the wavefront slope signal in subarea and parallel operations through theoretical analysis and experiments. The experimental results show that B-SL0 is significantly better than other existing reconstruction algorithms in the calculation time and accuracy, and explore the feasibility of compressed sensing technology for measurement of atmospheric turbulence wavefront preliminarily.

**Keywords:** compressed sensing; wavefront slope; SL0 algorithm; subregion; parallel operation

**Citation:** Li C, Cai D M, Jia P, *et al.* Research on reconstruction of atmospheric turbulence wavefront compressed sensing measurement[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2018, **45**(4): 170617

## 1 引言

为了克服大气湍流干扰,大型地基天文望远镜在天文成像观测中都陆续配备了自适应光学系统<sup>[1-4]</sup>。波前探测器能够实时测量大气湍流波前动态误差,是自适应光学系统的关键器件之一。Shack-Hartmann 传感器(Shack-Hartmann wavefront sensor, SHWFS)<sup>[5]</sup>是一种常用的波前测量器,它通过规则排列的微透镜阵列实时测量大气湍流相位  $\phi(x, y)$  的斜率  $\phi_x, \phi_y$  来实现大气湍流波前相位的测量。随着天文光学望远镜的口径的增大,成像分辨率的提高,对大气湍流波前测量系统提出了更高的要求。Rostami 等人<sup>[6-7]</sup>提出将压缩感知(compressed sensing, CS)技术<sup>[8-12]</sup>应用在大气湍流波前测量上,即波前斜率压缩感知(derivative compressed sensing, DCS)技术。DCS 通过对波前斜率的稀疏测量,再通过非线性重建算法精确重建波前斜率分布,最后恢复出大气湍流波前相位。压缩感知技术的应用,突破了 Nyquist 采样定律,可以大大减少波前斜率的测量数目,提高测量速度,减轻波前测量系统的硬件压力和数据传输与存储的压力。与现有波前斜率测量方法不同,大气湍流波前斜率的压缩感知测量,增加了一个从波前斜率的稀疏测量值到波前斜率的重建过程,这会导致波前数据处理的时间加长。由于大气湍流波前测量属于实时测量,所以需要在保证波前斜率信号重建精度的同时,加快斜率的重建速度。

参考文献<sup>[6-7]</sup>对压缩感知技术应用于大气湍流波前测量的可行性进行了研究,但并未涉及波前斜率稀疏信号的重建。波前斜率能否快速、高精度重建对压缩感知技术在波前测量上的应用至关重要。本文针对上述问题,对应用在大气湍流波前斜率重建上的压缩感知重建算法进行研究。随着压缩感知技术的发展和应用,目前有多种重建算法,如匹配追踪(matching pursuit, MP)算法<sup>[13]</sup>、正交匹配追踪(orthogonal matching pursuit, OMP)算法<sup>[14]</sup>、基追踪(basic pursuit, BP)算法<sup>[15]</sup>、梯度投影法<sup>[16]</sup>、Smoothed L0 Norm (SL0)

算法<sup>[17-18]</sup>等。其中 Smoothed L0 Norm (SL0)算法是一种近似 L0 范数估计的优化迭代重建算法,与其它类型算法相比,它不需要提前知道信号的稀疏度,计算量低且估计精度高。本文在 DCS<sup>[6]</sup>基础上,对波前斜率的稀疏测量信号进行分区域处理,结合 SL0 算法与并行运算,实现一种分区域并行波前斜率重建算法(B-SL0)。通过仿真实验对 B-SL0 算法进行了详细的理论推导和性能分析,实验结果表明,B-SL0 算法不仅大大缩短了重建运行时间,还提高了相位  $\phi(x, y)$  的重建精度。

## 2 波前斜率压缩感知测量原理

定义  $\phi(x, y)$  为大气湍流波前相位分布,其在  $x, y$  方向的斜率信号分别为  $\phi_x, \phi_y$ ,将  $\phi_x, \phi_y$  在变换域即稀疏字典  $\Psi \in \mathbb{R}^{M \times N}$  下进行稀疏表示为

$$\phi_x = \Psi \theta_x, \phi_y = \Psi \theta_y \quad (1)$$

式中:  $\theta_x \in \mathbb{R}^{M \times N}, \theta_y \in \mathbb{R}^{M \times N}$  为稀疏矩阵,即矩阵的非零元素数目满足  $K_x \ll N^2, K_y \ll N^2$ 。设计一个大小为  $M \times N$  且满足 RIP 准则<sup>[19-20]</sup>的观测矩阵  $\Phi$ (其中  $M \ll N$ )对波前斜率进行稀疏测量,得到斜率测量值  $f_x, f_y$ ,如式(2)所示:

$$f_x = \Phi \phi_x, f_y = \Phi \phi_y \quad (2)$$

式中:  $f_x \in \mathbb{R}^{M \times N}, f_y \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 。

结合式(1)与式(2)得到式(3):

$$f_x = \Phi \Psi \theta_x = A \theta_x, f_y = \Phi \Psi \theta_y = A \theta_y \quad (3)$$

式中  $A = \Phi \Psi \in \mathbb{R}^{M \times N}$  是感知矩阵。

波前斜率的压缩感知测量过程可由图 1 表示。

如图 1 所示,SHWFS 是通过一个  $N \times N$  规则排布的微透镜阵列测量波前斜率值  $\phi_x, \phi_y$ ,而压缩感知测量是先通过观测矩阵  $\Phi$  得到稀疏随机测量值  $f_x, f_y$ ,再根据  $f_x, f_y$  利用重建算法重建波前斜率,最后恢复出大气湍流波前相位分布  $\phi(x, y)$ 。

压缩感知波前测量方法可以有效地降低波前测量值数目,提高测量速度,同时降低探测器的硬件以及

数据的传输与存储要求。然而与 SHWFS 的测量过程相比,增加了从稀疏测量值  $f_x, f_y$  到  $\phi_x, \phi_y$  的重建过程。根据大气湍流波前测量实时、高精度的应用需求,从  $f_x, f_y$  到  $\phi_x, \phi_y$  的重建过程要求计算速度快,精度高,这样压缩感知技术在大气湍流波前测量的应用才有实际的工程意义。

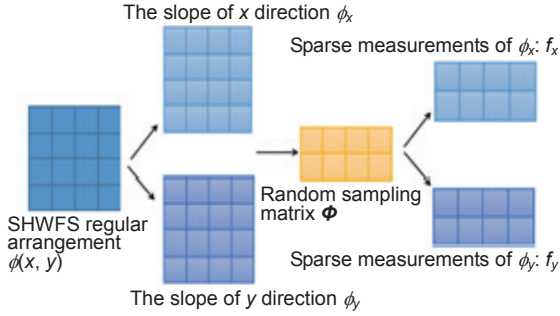


图 1 波前斜率压缩感知测量过程

Fig. 1 The measurement process of wavefront slope compressed sensing

### 3 B-SLO 算法原理及实现

下面以波前斜率  $\phi_x$  的重建过程为例对重建算法进行讨论。对波前斜率  $\phi_x$  的稀疏测量值  $f_x$  重建求解的核心问题可以表示为

$$\min_{\theta_x} \|\theta_x\|_0 \quad \text{s.t.} \quad f_x = A\theta_x \quad (4)$$

对于式(4),定义函数  $l(\theta_x)$  为

$$l(\theta_x) = \begin{cases} 1 & \theta_x = 1 \\ 0 & \theta_x = 0 \end{cases} \quad (5)$$

因此, L0 范数可以等价于式(6):

$$\|\theta_x\|_0 = L(\theta_x) = \sum_{s=1}^N l(\theta_{x_s}) \quad (6)$$

因为 L0 范数求解是一个 NP-hard 问题,无法直接求解,所以出现了很多重建算法。根据大气湍流波前测量实时性的要求,通过对多个重建算法的分析,SL0 算法无需提前知道信号的稀疏度,计算量小、运算速度快,适合用于波前斜率的重建。

#### 3.1 波前斜率信号分区域并行处理

大气湍流波前斜率信号属于二维分布。对于二维信号,现有的重建算法大部分都是将其转化为一维信号或按列依次重建,通过串行计算进行重建,这样不但使重建算法计算时间大大增加,还会破坏波前斜率信号列与列之间的联系,降低波前斜率重建精度,影响波前相位的恢复。针对这些问题,本文考虑分区域重建波前斜率信号,以  $x$  方向上的斜率  $\phi_x$  为例,由于

SHWFS 是通过一个  $N \times N$  规则排布的微透镜阵列测量波前斜率值  $\phi_x, \phi_y$ , 我们将  $N \times N$  规则排布的微透镜阵列分割成  $n$  个  $B \times B$  大小的区域,其中  $n = N^2/B^2$ , 然后得到  $n$  个  $B \times B$  大小的  $\phi_x$  的子集  $\phi_{f_i}$ , 由于 SL0 算法针对一维信号重建,故将  $\phi_{f_i}$  每列首尾相连,得到  $n$  个  $B^2 \times 1$  大小的列矩阵  $y_{f_i}$ , 将  $n$  列  $y_{f_i}$  向量合并在一起得到处理后的波前斜率信号  $y_f$ , 最后通过随机采样  $\Phi_f$  得到  $y_f$  的稀疏随机测量值  $Y_f$ 。虽然本文也采用将二维信号转化为一维信号处理的方法,但是并没有完全破坏信号列与列之间的联系,在一定程度上较 SL0 算法减轻了对信号内部关系的破坏,提高了波前相位重建精度。分区域处理后的波前斜率信号  $y_f$  如图 2 所示。

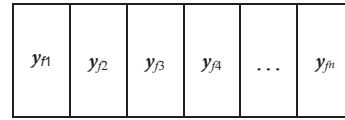


图 2 分区域处理后的波前斜率信号  $y_f$

Fig. 2 Wavefront slope signal  $y_f$  after subarea processing

所以式(4)转化为式(7):

$$\min_{\theta_f} \|\theta_f\| \quad \text{s.t.} \quad Y_f = A_f \theta_f \quad (7)$$

式中  $A_f = \Phi_f \Psi$ 。

对于每一块  $y_{f_i}$  而言,式(4)转化为式(8):

$$\min_{\theta_{f_i}} \|\theta_{f_i}\| \quad \text{s.t.} \quad Y_{f_i} = A_{f_i} \theta_{f_i} \quad (8)$$

式中  $i=1, 2, \dots, n$ 。

对于每个区域而言,彼此之间是互不相关的,所以得到的波前斜率  $\phi_{f_i}$  也是互不依赖的,即处理后的斜率信号  $y_f$  的列与列之间互不依赖,能同时对  $y_f$  每列利用 SL0 算法并行重建再合并为处理后的斜率重建值  $\hat{y}_f$ , 再通过逆变换得到最终的波前斜率重建信号  $\hat{\phi}_x$ , 这样不但提高信号的重建速度,还在一定程度上保护了斜率信号列与列之间的关联,提高了重建精度。

#### 3.2 B-SLO 算法原理

B-SLO 算法的基础是 SL0 算法,SL0 算法属于一种近似 L0 范数估计方法,基本思想是利用一个连续代理函数来逼近 L0 范数。定义一个标准高斯函数  $f_\sigma(\theta_{f_i})$  作为处理后的波前斜率  $y_{f_i}$  的某一列  $y_{f_i}$  的 L0 范数的近似估计函数,如式(9)所示:

$$f_\sigma(\theta_{f_i}) = \exp\left(-\frac{\theta_{f_i}^2}{2\sigma^2}\right) \quad (9)$$

式中  $\sigma$  是一个常数参变量。

从式(9)可以得出:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_{\sigma}(\theta_{f_i}) = \begin{cases} 0 & \theta_{f_i} \neq 0 \\ 1 & \theta_{f_i} = 0 \end{cases}, \quad (10)$$

$$\text{令 } F_{\sigma}(\theta_{f_i}) = \sum_{s=1}^{B^2} f_{\sigma}(\theta_{f_{i_s}}),$$

进而得到：

$$\|\theta_{f_i}\|_0 = L(\theta_{f_i}) = N - \lim_{\sigma \rightarrow 0} F_{\sigma}(\theta_{f_i}). \quad (11)$$

由此可以看出,式(4)的求解就是求  $F_{\sigma}(\theta_{f_i})$  函数的最大值。显然  $\sigma$  值越小,式(10)越逼近 L0 范数,但同时会造成函数的不光滑,从而可能陷入局部最大值;反之, $\sigma$  值越大,式(9)越光滑,包含的局部最大值也就越少,式(10)近似 L0 范数的程度也就越差。SL0 算法采用逐步降低  $\sigma$  值的方法来解决上述问题,即首先设置  $\sigma$  为一个足够大的值  $\sigma_0$  来确保此时的  $F_{\sigma}$  平滑且包含很少的局部最大值,然后赋予  $\sigma$  值一个逐渐降低的序列,多次循环直到达到设置的截止条件为止。SL0 算法重建处理后的波前斜率信号  $y_f$  的某一系列  $y_{f_i}$  的主要步骤为

输入：观测向量  $Y_{f_i} (i=1, 2, \dots, n)$ ,  $A_f$

运算：

1) 设置  $\theta_{f_i}$  的初始值  $\hat{\theta}_{f_{i_0}}$  为  $Y_{f_i} = A_f \theta_{f_i}$  的最小二乘

解,即  $\hat{\theta}_{f_{i_0}} = (A_f^T A_f)^{-1} A_f^T Y_{f_i}$ ;

2) 设置逐渐减小的参数  $\sigma$  的序列  $\{\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_j\}$ ;

对于  $j=1, 2, \dots, J$

令  $\sigma = \sigma_j$ ;

使用最速下降法在可行域

$$\Gamma = \{\theta_{f_i} | Y_{f_i} = A_f \theta_{f_i}\};$$

来最大化  $F_{\sigma}$ , 并迭代运行  $K$  次;

初始化：令  $\theta_{f_i} = \hat{\theta}_{f_{i_{j-1}}}$

对于  $k=1, 2, \dots, K$

a) 令

$$\delta = [\theta_{f_{i_1}} f_{\sigma}(\theta_{f_{i_1}}), \theta_{f_{i_2}} f_{\sigma}(\theta_{f_{i_2}}), \dots, \theta_{f_{i_{B^2}}} f_{\sigma}(\theta_{f_{i_{B^2}}})]^T;$$

b) 设置步长  $\mu$  (为一正常数), 更新:

$$\theta_{f_i} = \theta_{f_i} - \mu \delta;$$

c) 将  $\theta_{f_i}$  投影到可行域  $\Gamma$  上, 即:

$$\theta_{f_i} = \theta_{f_i} - A_f^T (A_f A_f^T)^{-1} (A_f \theta_{f_i} - Y_{f_i}).$$

设置  $\theta_{f_{i_j}} = \theta_{f_i}$ ;

输出：重构信号  $\hat{\theta}_{f_i} = \hat{\theta}_{f_{i_j}}$ 。

从上述可知 SL0 算法存在两个循环, 其中内循环采用最速下降法求解目标函数  $F_{\sigma}$  的极大值, 并且采用固定的步长因子  $\mu$ 。为了提高速度, 并不需要等到最

速下降法到达收敛, 即对每一个  $\sigma$  值, 并不用得到  $F_{\sigma}$  的精确最大值, 只需要进入  $F_{\sigma}$  最大化附近的区域, 避免进入局部最大值即可, 从而加快算法整体的运行速度。

B-SLO 算法流程图如图 3 所示。首先通过观测矩阵  $\Phi_f$  处理后的波前斜率  $y_f$  稀疏测量, 得到观测数据  $Y_f$ , 后利用并行运算结合 SL0 算法重构稀疏矩阵  $\theta_f$  估计值  $\hat{\theta}_f$ , 再通过逆矩阵变换得到分区域处理信号  $y_f$  的估计值  $\hat{y}_f$ 。由于得到的是各分区域处理后的波前斜率的估计值, 需要将  $\hat{y}_f$  进行逆变换, 得到波前斜率信号  $\phi_x$  的估计值  $\hat{\phi}_x$ , 同理可得到  $\phi_y$  的估计值  $\hat{\phi}_y$ , 最后利用  $\hat{\phi}_x$  和  $\hat{\phi}_y$  恢复出波前相位分布  $\phi(x, y)$  的估计值  $\hat{\phi}(x, y)$ 。

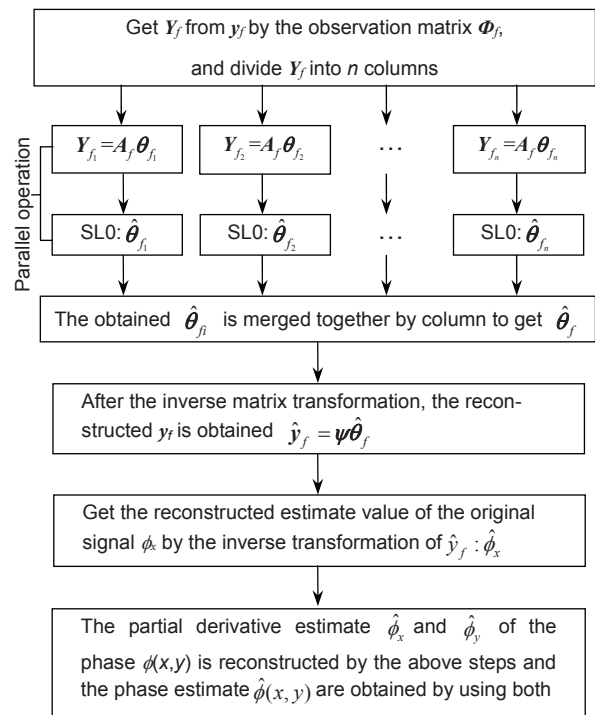


图 3 B-SLO 算法流程图

Fig. 3 The flow chart of B-SLO algorithm

## 4 实验结果与分析

为了说明 B-SLO 算法对大气湍流波前斜率的重建性能, 本文基于 MATLAB R2016a 处理平台进行了仿真实验。将细分离散余弦基(discrete cosine transform, DCT)作为波前斜率的稀疏字典  $\Psi$ , 高斯随机矩阵作为测量矩阵  $\Phi$ , 设每个区域的大小  $B=16$ 。利用功率谱反演<sup>[21-22]</sup>得到大气湍流随机相位分布  $\phi(x, y)$  作为测量目标, 通过对斜率信号的稀疏测量, 利用 B-SLO 算法重建波前斜率值, 最后重构出波前相位  $\hat{\phi}(x, y)$ , 并与

$\phi(x, y)$  比较, 进而评价 B-SL0 算法的性能。

图 4 为相干长度  $r_0=0.05$ , 相位屏尺寸  $D=2$ , 分辨率为  $256 \times 256$  的大气湍流相位屏的仿真结果, 图 4(a) 为大气湍流相位分布  $\phi(x, y)$ 。在压缩比  $r=0.3$  (压缩比  $r=M/N$ ) 下, 对波前斜率稀疏测量, 分别利用 B-SL0 和 SL0 重建波前斜率, 进而重构波前相位  $\hat{\phi}(x, y)$ , 见图 4(b)、4(d)。比较  $\hat{\phi}(x, y)$  和  $\phi(x, y)$ , 得到重建相位分布的误差, 见图 4(c)、4(e)。可以明显的看出 B-SL0 算法重建波前斜率恢复出的相位屏和原图更为相近, 误差小; SL0 算法重建结果恢复出的相位屏与原图有明显的差别, 误差大, 所以 B-SL0 算法具有更好的重建性能。

为了定量分析 SL0 与 B-SL0 算法的重建性能, 实

验对大气湍流波前相位  $\phi(x, y)$  进行了 50 次循环重建, 计算其均方误差 MSE 与峰值信噪比 PSNR 的平均值。图 5 为不同压缩比下两种算法的比较结果。当压缩比  $r$  在  $0.2 \sim 0.5$  之间时, B-SL0 算法的重建相位屏的 PSNR 高出 SL0 算法的 1 倍左右, 在  $r=0.3$  时, PSNR 高出了接近 20 dB, MSE 则低于 SL0 算法的 22 倍左右。图 6(a)、6(b) 为波前斜率  $\phi_x, \phi_y$  的重建时间比较, B-SL0 算法的运行时间远低于 SL0 算法, 且随着压缩比的上升, B-SL0 算法的运行时间的变化相对比较平稳, 基本都在  $0.1 \text{ s} \sim 0.9 \text{ s}$  之间。B-SL0 算法无论是在重建精度还是运行时间上都优于 SL0 算法。

为了证明 B-SL0 算法的一般性, 模拟生成 50 幅大气湍流随机相位屏, 在同一压缩比  $r$  下, 分别采用

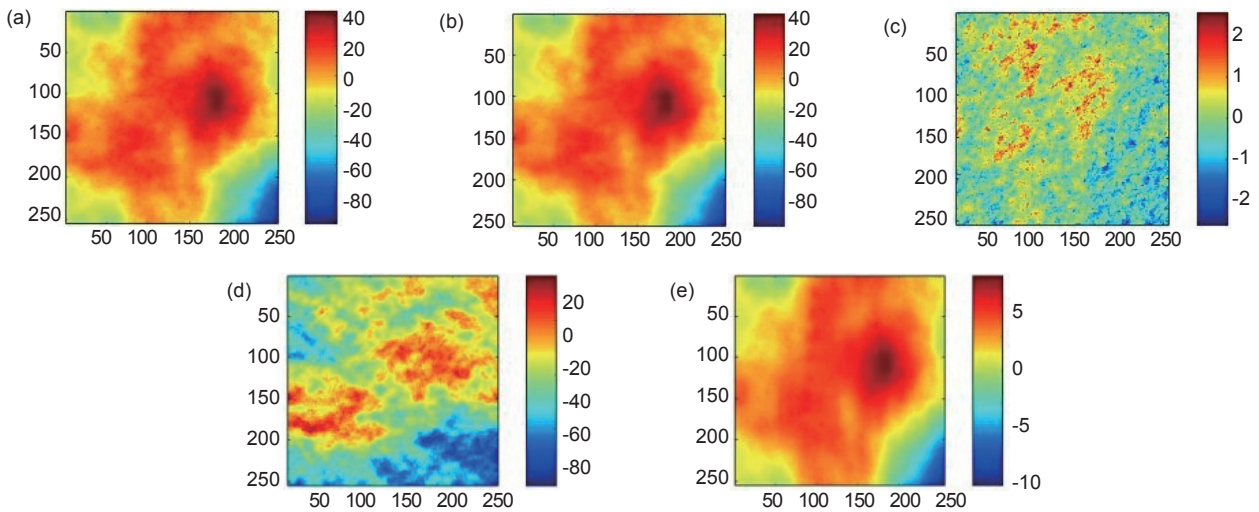


图 4  $r=0.3$  时, B-SL0 和 SL0 重建和重建误差对比图。(a) 原图; (b) B-SL0 重建图; (c) B-SL0 重建误差图; (d) SL0 重建图; (e) SL0 重建误差图

Fig. 4 The reconstruction comparison of B-SL0 and SL0 when  $r=0.3$ . (a) Original image; (b) Reconstruction of B-SL0; (c) Reconstruction error of B-SL0; (d) Reconstruction of SL0; (e) Reconstruction error of SL0

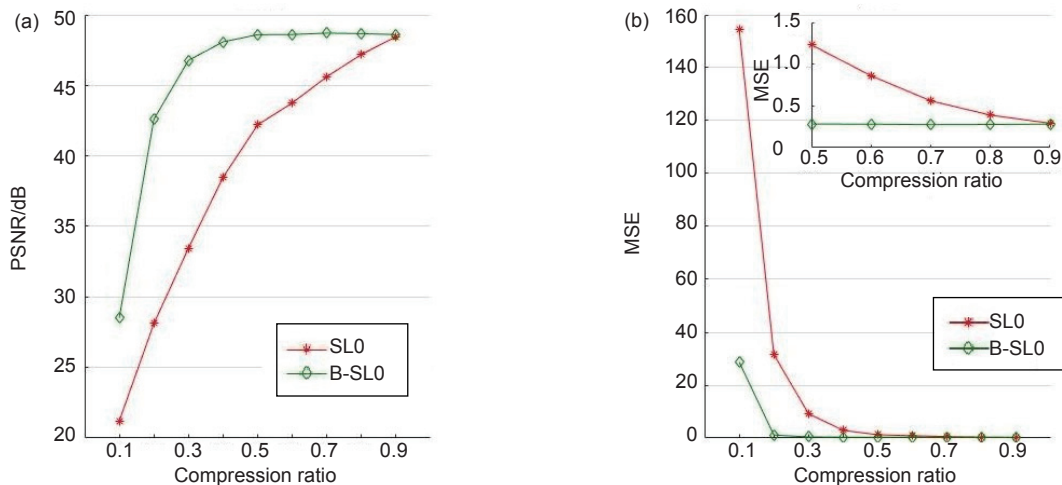


图 5 合成相位  $\phi$  峰值信噪比与均方误差分析曲线

Fig. 5 The analysis curve about curve peak signal to noise ratio and mean square error of synthetic phase  $\phi$

B-SL0 算法与 SL0 算法重建, 并把 50 幅图的均方误差 MSE 与峰值信噪比 PSNR 的平均值和重建时间进行对比, 见表 1。

从表 2 中可以看出, B-SL0 算法重建结果的 PSNR 比 SL0 算法高出 13 dB 左右, MSE 低了接近 23 倍, 运

行时间也比 SL0 算法降低了 5 倍左右。为了更加直观体现 B-SL0 算法的性能, 我们从这 50 幅不同的相位屏中任取一幅, 将其原图与 B-SL0 算法、SL0 算法分别重建的相位屏图做对比, 如图 7 所示, 其中图 7(a)为相位屏原图, 7(b)为 B-SL0 算法的相位屏重建图, 7(c)

表 1 不同相位屏的 SL0 与 B-SL0 重建质量对比

Table 1 The reconstruction quality comparison of SL0 and B-SL0 algorithm under different phase screens

Algorithms	PSNR/dB	MSE	Running time/s	
			$\phi_x$	$\phi_y$
B-SL0	48.48	0.43	0.27	0.24
SL0	35.25	9.70	1.55	1.52

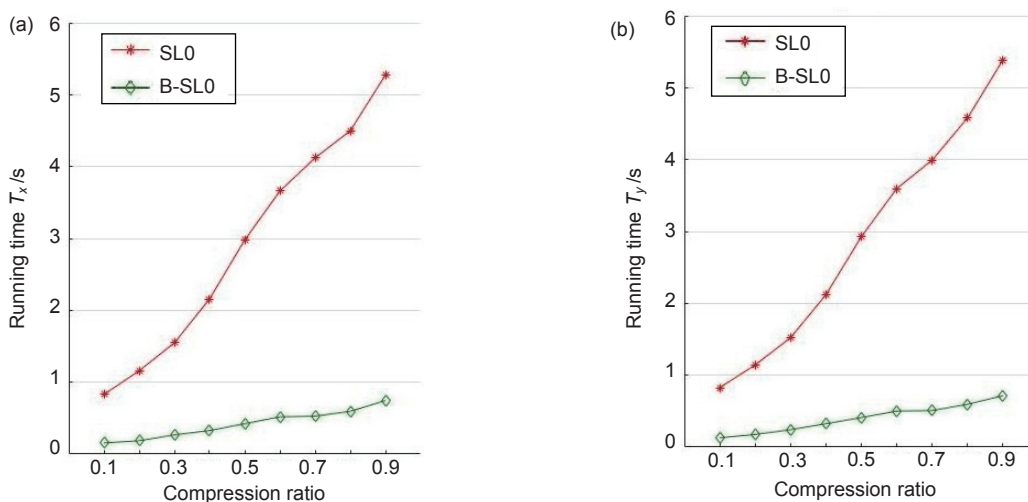


图 6 波前斜率的重建时间

Fig. 6 Reconstruction time of wavefront slope

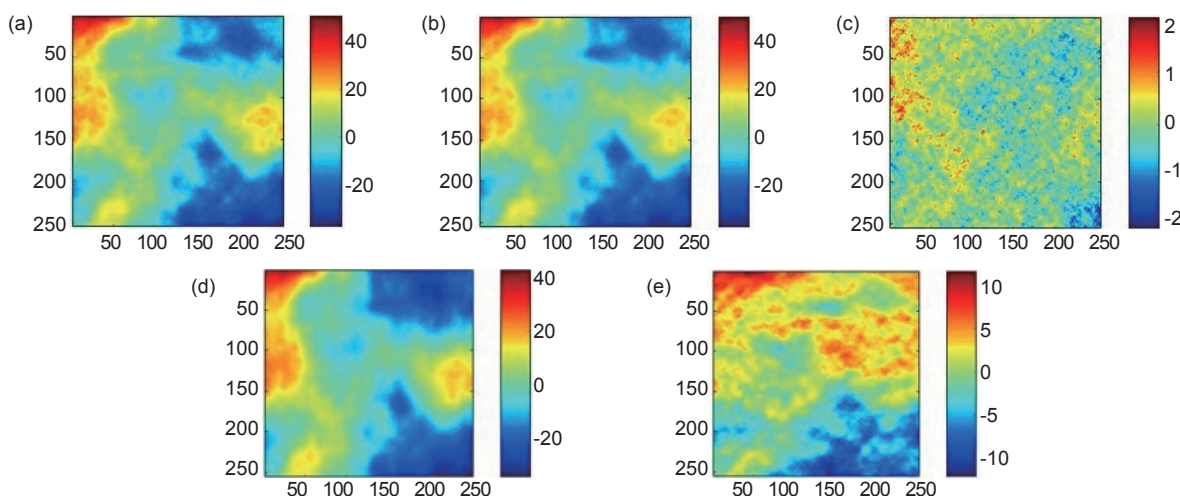


图 7 任意一幅相位屏重建对比图。(a) 原图; (b) B-SL0 重建图; (c) B-SL0 重建误差图; (d) SL0 重建图; (e) SL0 重建误差图

Fig. 7 The reconstruction comparison of any one phase screen. (a) Original image; (b) Reconstruction of B-SL0; (c) Reconstruction error of B-SL0; (d) Reconstruction of SL0; (e) Reconstruction error of SL0

为 B-SL0 算法的相位屏重建误差图 7, (d)为 SL0 算法的相位屏重建图, 7(e)为 SL0 算法的相位屏重建误差图。从图中可以明显看出 B-SL0 比 SL0 算法取得了更好的重建效果。

为了进一步分析 B-SL0 算法在重建精度和运行时间上的性能, 我们将 B-SL0 与一些经典重建算法进行对比。表 2 是在压缩比  $r=0.3$  的情况下, 各种算法重建性能比较。表 2 表明, 无论是峰值信噪比 PSNR, 还是均方误差 MSE, 亦或是运行时间, B-SL0 的重建相位屏的效果都要优于其他几种算法。

最后研究了 B-SL0 算法的鲁棒性, 在压缩比  $r=0.3$  的条件下, 比较了各算法在不同的信噪比 SNR 下的重建性能。图 8 是不同算法在不同信噪比下的峰值信噪比 PSNR 与均方误差 MSE 的比较曲线。

从图中可以明显看出相比较其它几种重建算法,

B-SL0 算法在不同的噪声条件下, 重建效果依然比较平稳, 体现了 B-SL0 算法的鲁棒性。

### 5 总结

将压缩感知技术应用在大气湍流波前斜率重建上, 虽然能够很大程度上降低对波前测量硬件系统的压力, 减少数据传输与存储的压力, 但是也会增加波前数据处理时间, 这对压缩感知重建算法提出了更高的要求。本文在 DCS 的基础上, 针对其重构精度和运行速度两方面的不足, 将 SL0 算法与分区域并行运算相结合, 提出了分区域并行算法—B-SL0 算法。由于 SL0 算法是针对一维信号重建, 对于波前斜率这类二维信号采用逐列串行重建方法, 一方面这属于串行运算, 增加了算法重建时间; 另一方面会破坏波前斜率信号列与列之间的关联, 降低了波前斜率重建精度,

表 2 各算法重建质量对比

Table 2 The reconstruction quality comparison of different algorithms

Algorithms	PSNR/dB	MSE	Running time/s	
			$\phi_x$	$\phi_y$
B-SL0	56.67	0.40	0.26	0.24
SL0	45.09	5.80	1.56	1.54
OMP	44.09	7.30	4.24	4.81
SP	32.73	99.88	1.59	1.59
BP	34.13	72.27	24.26	30.96

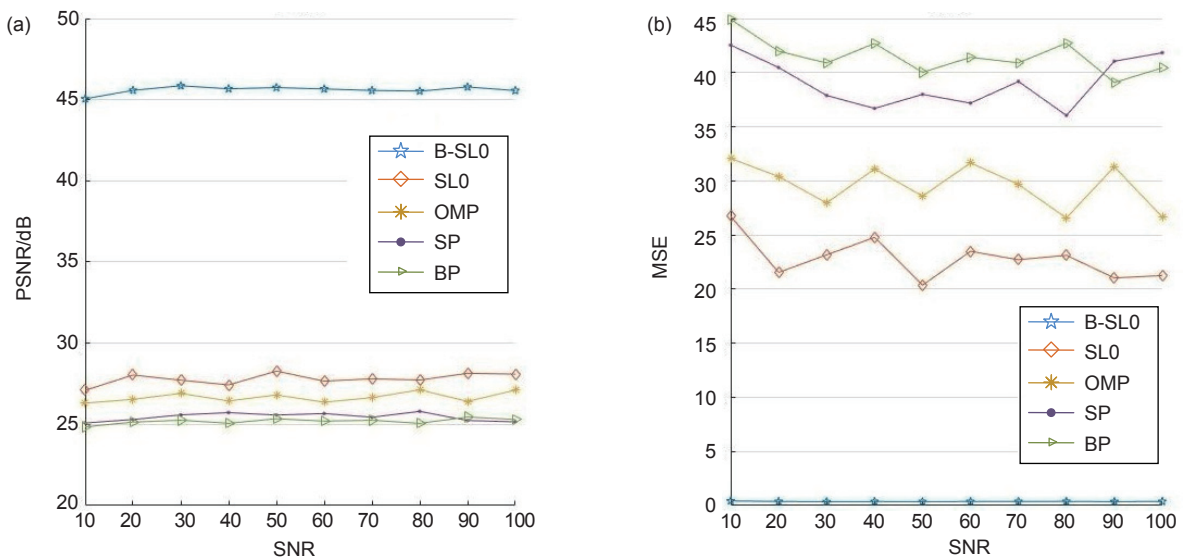


图 8 不同信噪比下的 PSNR 与 MSE 对比图

Fig. 8 Comparison of PSNR and MSE under different signal to noise ratio

B-SLO 算法则采用分区域并行运算,不但减少了重建算法的运行时间,还降低了对斜率信号列与列之间的联系破坏,提高了波前相位的重建精度。仿真实验结果表明,B-SLO 算法不但在波前斜率的运行时间上优于 SLO 算法,而且其重建的波前斜率恢复出的波前相位精度也要好于 SLO 算法,此外,与一些经典算法相比(如 OMP、SP 和 BP 等),在相同的条件下该算法不但在运行时间上有了很大的改进,而且其重建出的斜率还能够更好地恢复大气湍流波前相位  $\phi(x, y)$ ,体现了该算法在重建相位屏  $\phi(x, y)$  上的良好的性能。从算法本身来讲,本文的并行运算是利用 MATLAB 软件工具箱自带的并行运算函数,未对其并行运算部分采用 GPU 加速进行优化。本文的工作主要是对将压缩感知用于大气湍流波前测量的可行性进行了初步探索,对于实际的工程应用还有相当的距离,需要进一步改进算法本身的性能,提高计算速度和重建精度。

## 参考文献

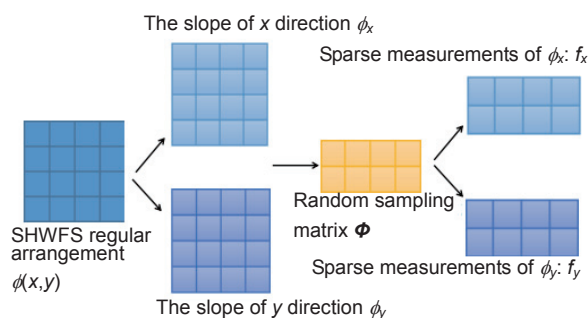
- [1] Lin X D, Xue C, Liu X Y, et al. Current status and research development of wavefront correctors for adaptive optics[J]. *Chinese Optics*, 2012, **5**(4): 337–351.  
林旭东, 薛陈, 刘欣悦, 等. 自适应光学波前校正器技术发展现状[J]. *中国光学*, 2012, **5**(4): 337–351.
- [2] Xian H. Design and optimization of wavefront sensor for adaptive optics system[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2008.  
鲜浩. 自适应光学系统波前传感器设计与优化[D]. 成都: 电子科技大学, 2008.
- [3] Niu C J, Yu S J, Han X E. Analysis about effect of wavefront sensorless adaptive optics on optical communication[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2015, **52**(8): 080102.  
牛超君, 于诗杰, 韩香娥. 无波前探测自适应光学对光通信性能影响分析[J]. *激光与光电子学进展*, 2015, **52**(8): 080102.
- [4] Zhang Q, Jiang W H, Xu B. Study of zonal wavefront reconstruction adapting for Hartmann-Shack wavefront sensor[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 1998, **10**(2): 229–233.  
张强, 姜文汉, 许冰. 用于 Hartmann-Shack 波前探测器的区域法算法研究[J]. *强激光与粒子束*, 1998, **10**(2): 229–233.
- [5] Yazdani R, Fallah H. Wavefront sensing for a Shack–Hartmann sensor using phase retrieval based on a sequence of intensity patterns[J]. *Applied Optics*, 2017, **56**(5): 1358–1364.
- [6] Rostami M, Michailovich O, Wang Z. Image deblurring using derivative compressed sensing for optical imaging application[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, **21**(7): 3139–3149.
- [7] Polans J, McNabb R P, Izatt J A, et al. Compressed wavefront sensing[J]. *Optics Letters*, 2014, **39**(5): 1189–1192.
- [8] Donoho D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(4): 1289–1306.
- [9] Ren Y M, Zhang Y N, Li Y. Advances and perspective on compressed sensing and application on image processing[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(8): 1563–1575.  
任越美, 张艳宁, 李映. 压缩感知及其图像处理应用研究进展与展望[J]. *自动化学报*, 2014, **40**(8): 1563–1575.
- [10] Tsaig Y, Donoho D L. Extensions of compressed sensing[J]. *Signal Processing*, 2006, **86**(3): 549–571.
- [11] Candès E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(2): 489–509.
- [12] Candès E J, Tao T. Near-optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(12): 5406–5425.
- [13] Mallat S G, Zhang Z F. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, **41**(12): 3397–3415.
- [14] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, **53**(12): 4655–4666.
- [15] Yin W, Morgan S, Yang J F, et al. Practical compressive sensing with Toeplitz and circulant matrices[J]. *Proceedings of SPIE*, 2010, **7744**: 77440K.
- [16] Applebaum L, Howard S D, Searle S, et al. Chirp sensing codes: Deterministic compressed sensing measurements for fast recovery[J]. *Applied & Computational Harmonic Analysis*, 2009, **26**(2): 283–290.
- [17] Mohimani H, Babaie-zadeh M, Jutten C. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed l0 norm[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(1): 289–301.
- [18] Mohimani G H, Babaie-zadeh M, Jutten C. Fast sparse representation based on smoothed l0 norm[C]//*Proceedings of the 7th International Conference on Independent Component Analysis and Signal Separation*. Springer-Verlag, 2007: 389–396.
- [19] Candès, Emmanuel J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J]. *Comptes rendus- Mathématique*, 2008, **346**(9): 589–592.
- [20] Cai T T, Wang L, Xu G W. New bounds for restricted isometry constants[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, **56**(9): 4388–4394.
- [21] Cai D M, Wang K, Jia P, et al. Sampling methods of power spectral density method simulating atmospheric turbulence phase screen[J]. *Journal of physics*, 2014, **63**(10): 104217.  
蔡冬梅, 王昆, 贾鹏, 等. 功率谱反演大气湍流随机相位屏采样方法的研究. *物理学报*, 2014, **63**(10): 104217.
- [22] Zhang Z L. Research on the simulation system of indoor atmospheric turbulence[D]. Taiyuan: Taiyuan University of Technology, 2017.  
张智露. 室内大气湍流模拟系统的研究[D]. 太原: 太原理工大学, 2017.
- [23] Li Y J, Zhu W Y, Rao R Z. Simulation of random phase screen of non-Kolmogorov atmospheric turbulence[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2016, **45**(12): 1211001.  
李玉杰, 朱文越, 饶瑞中. 非 Kolmogorov 大气湍流随机相位屏模拟[J]. *红外与激光工程*, 2016, **45**(12): 1211001.



# Research on reconstruction of atmospheric turbulence wavefront compressed sensing measurement

Li Can<sup>1</sup>, Cai Dongmei<sup>2\*</sup>, Jia Peng<sup>2</sup>, Liu Jianxia<sup>1</sup>, Li Juanjuan<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Information Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan, Shanxi 030024, China;  
<sup>2</sup>Institute of Physics and Optoelectronics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan, Shanxi 030024, China



The measurement process of wavefront slope compressed sensing

**Overview:** Compressed sensing technology for atmospheric turbulence wavefront slope measurement can greatly improve the wavefront signal measurement speed, while reducing the pressure of wavefront measurement system hardware. Different from the existing wavefront slope measurement method, the compressed sensing wavefront measurement increase a process from sparse measurement of wavefront slope value to the reconstruction of the wavefront slope signal, which will increase the wavefront data processing time. So this means putting forward higher demands on the compressed sensing reconstruction algorithm. Therefore, it is necessary to reconstruct wavefront slope quickly and accurately with compressed sensing technology for wavefront measurement.

Smoothed L0 Norm (SL0) algorithm is an optimal iterative reconstruction algorithm with approximate L0 norm estimation. Compared with other algorithms, it does not need to know the sparsity of the signal in advance, and it has lower computational complexity and higher estimation accuracy. Because the SL0 algorithm is based on one-dimensional signal reconstruction, while the method of column by line serial reconstruction is used for two-dimensional signals such as wavefront slope. On the one hand, it belongs to serial operation and increases the reconstruction time, on the other hand, it destorys the relationship between the columns of the wavefront slope signal, which reduces the wavefront slope reconstruction precision.

Aiming at the shortcomings of its reconstruction accuracy and running speed, this paper implements a subregion parallel algorithm—Block-Smoothed L0 Norm (B-SL0), which can quickly and accurately reconstruct the signal by measuring the wavefront slope signal in subarea and parallel operations through theoretical analysis and simulation experiments based on the SL0 algorithm the wavefront derivative compressed sensing (DCS). The B-SL0 algorithm uses subregional parallel operation, which not only reduces the running time of the reconstruction algorithm, but also reduces the damage to the internal information of the wavefront slope signal and further improves the reconstruction accuracy of the wavefront phase.

The simulation results show that the B-SL0 algorithm is superior to the SL0 algorithm in terms of the running time of the wavefront slope reconstruction, and the wavefront phase accuracy restored by the reconstructed wavefront slope is better than that of the SL0 algorithm. In addition, compared with some classical algorithms, such as OMP, SP and BP, the B-SL0 algorithm in the same conditions not only greatly improves the running time of the wavefront slope reconstruction, and the reconstructed wavefront slope signal can restore the atmospheric turbulence wavefront phase better, which reflects the performance of the B-SL0 algorithm is good in reconstructing phase screen.

**Citation:** Li C, Cai D M, Jia P, *et al.* Research on reconstruction of atmospheric turbulence wavefront compressed sensing measurement[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2018, 45(4): 170617.

Supported by Young Scientist Funds of National Natural Science Foundation of China (11503018) and Joint Research Fund in Astronomy (U1631133)

\* E-mail: dm\_cai@163.com