



DOI: 10.12086/oee.2018.170740

分数傅里叶变换域稀疏带限信号的模拟信息转换

宋维斌, 张圣儒, 邓忆秋, 孙楠, 史军*

哈尔滨工业大学通信技术研究所, 黑龙江 哈尔滨 150001

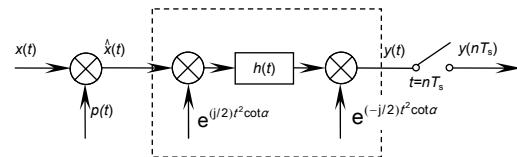
摘要: 经典香农采样定理在信号处理和通信领域有着深远的影响, 随着高速率采样与转换精度矛盾的日益突出, 基于香农采样定理的传统模拟数字转换技术面临严峻的挑战, 尤其是在降低采样率问题上存在着瓶颈效应的制约。近年来, 在信号处理领域诞生的基于压缩感知理论的模拟信息转换技术为解决这一问题提供了一种有效的方法。然而, 现有模拟信息转换的信号模型仅适合频域带限的多音和多带信号。在通信、雷达等电子信息系统广泛存在的线性调频信号就不满足这一模型。鉴于此, 本文提出了基于分数傅里叶变换的模拟信息转换, 不仅对现有模拟信息转换在分数傅里叶变换域进行了推广, 更重要的是解决了其前述面临的问题。本文给出了相应的理论推导, 并进行了仿真分析, 仿真结果与理论分析一致。

关键词: 分数阶傅里叶变换; 随机解调; 压缩感知; 采样

中图分类号: TN911.7

文献标志码: A

引用格式: 宋维斌, 张圣儒, 邓忆秋, 等. 分数傅里叶变换域稀疏带限信号的模拟信息转换[J]. 光电工程, 2018, 45(6): 170740



Analog to information conversion for sparse signals band-limited in fractional Fourier transform domain

Song Weibin, Zhang Shengru, Deng Yiqiu, Sun Nan, Shi Jun*

Communication Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China

Abstract: The classical Shannon sampling theorem has a profound influence on signal processing and communication. With the increasing contradiction between high rate sampling and conversion accuracy, the traditional analog to digital conversion technology, which is based on the Shannon sampling theorem, is facing a great challenge, especially for the bottleneck effect on reducing the sampling rate. In recent years, the analog-to-information conversion (AIC) technology, which is based on the theory of compressive sensing, provides an effective method to solve this problem. However, the signal model of the existing AIC is only suitable for sparse signals band-limited in the Fourier transform (FT) domain. It cannot be applied to non-bandlimited chirp signals which is widely used in electronic information systems, including radar and communications. Towards this end, we propose a new AIC based on the fractional Fourier transform (FRFT), which is not only the extension of the traditional AIC in the FRFT domain, but also can solve the problem as mentioned above. The theoretical derivation is presented, and the corresponding si-

收稿日期: 2017-12-30; 收到修改稿日期: 2018-03-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(61501144); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(01111305)

作者简介: 宋维斌(1995-), 男, 硕士研究生, 主要从事模拟信息转换, 采样理论的研究。E-mail: weibinsong@yeah.net

通信作者: 史军(1983-), 男, 工学博士, 副教授, 主要从事信号采样与逼近理论的研究。E-mail: junshi@hit.edu.cn

mulation analysis is also given. The simulation results are consistent with the theoretical analysis.

Keywords: fractional Fourier transform; random demodulation; compressive sensing; sampling theory

Citation: Song W B, Zhang S R, Deng Y Q, et al. Analog to information conversion for sparse signals band-limited in fractional Fourier transform domain[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2018, 45(6): 170740

1 引言

在信号处理中，采样是将时域连续的模拟信号转换为离散的数字信号的过程。现代信号处理技术中所处理的大多数信号都是经过采样而得到的数字信号，因此采样可以说是当今数字信号处理中最为基础的环节。传统的采样过程是基于香农-奈奎斯特采样定理^[1]的均匀采样，对于最高频率不超过 $W/2$ Hz 的模拟信号 $f(t)$ ，为确保能无失真地恢复原始信号，最低采样速率需要大于信号中最高频率的二倍。假设采样速率为 W Hz，由采样值恢复原信号可以通过 sinc 函数插值来实现：

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(k/W) \text{sinc}(Wt - k) . \quad (1)$$

随着采样定理的发展，产生了很多采样定理的拓展形式，如随机过程采样、非均匀采样、非带限采样、广义函数采样等。近年来，香农采样定理通过分数阶傅里叶变换(fractional Fourier transform, FRFT)由频域扩展到了更为广义的分数傅里叶域。对于分数域带宽为 $[-u_m^\alpha, u_m^\alpha]$ 的带限信号 $f(t)$ ，分数域采样定理^[2]要求采样的分数域频率 u_s 必须大于信号最高分数域频率的二倍，即满足 $u_s > 2u_m^\alpha$ 时，才能实现分数谱无混叠的采样。由离散采样值重构原信号的过程如式(2)所示：

$$f(t) = \exp\left[(-j/2)t^2 \cot \alpha\right] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \cdot \exp\left[(j/2)(nT_s)^2 \cot \alpha\right] \text{sinc}\left[(t - nT_s)u_m^\alpha \csc \alpha\right] , \quad (2)$$

其中 $T_s = 2\pi \sin \alpha / u_s$ 为采样间隔。

然而，在雷达和超宽带通信系统中，信号的频率较高，占用频带较宽，对处在系统前端的模拟数字转换器(analog to digital converter, ADC)提出了严峻的挑战。以超宽带通信为例，如果模拟信号的带宽为 2 GHz，由香农采样定理可知其采样速率至少为 4 GHz。这样的话，不仅采样和信号处理的硬件方面难以满足其要求，而且需要消耗大量的资源来储存和传输这些数据。分数域的采样作为香农采样定理的拓展形式，其采样频率也与信号的最高频率相关，因此同样存在高速率采样的问题。

实际上，在许多高速率采样的情景中，人们实际

需要的信息只占了很小的一部分带宽，信号中存在大量的冗余。压缩感知理论(compressive sensing, CS)^[3-5]正是利用信号的这种冗余特性来实现数据的压缩采样，如果一个离散信号在某个变换域中是稀疏的，那么就可以利用一个与变换域不相关的观测矩阵将高维信号映射到低维空间来得到低维的观测值，从而在采样的过程中实现数据的压缩，而且能够用少量的观测值通过算法以极大概率恢复出原始信号。因此，学者们结合压缩感知理论提出了一些针对模拟信号的降低采样速率的方法——称之为模拟信息转换器(analog to information converter, AIC)^[6]。2006 年莱斯大学的 Kirolos^[6]等人提出了一种基于随机解调(random demodulate, RD)的模拟信息转换方案，对之后的 AIC 的发展起到了巨大的推动作用。2010 年，加州理工学院 Tropp^[7]等人在此基础上对 RD 的稳定性等方面展开了深入的研究。之后，Eldar 教授及其科研团队^[8-9]针对多频带模拟信号的压缩感知问题，提出了基于调制宽带转换器(modulated wideband converter, MWC)的 AIC 方案。国内关于模拟信息转换的研究也一直在进行，文献[10]中介绍了模拟信息转换的研究进展，文献[11-12]中分别介绍了基于 RD 和基于 MWC 的模拟信息转换方案并且对其进行了改进。此外，还有对模拟信息转换技术的硬件仿真以及相关背景下的应用研究，如文献[13]中现代雷达信号处理背景下处理高频段大带宽稀疏信号的应用。

在诸多 AIC 采样方案中，随机解调采样方案是一种典型的、结构简单且有很好的可行性方案。RD 通过一个高速伪随机乘法器有效地降低了后端的采样速率，减少了数据率。然而这种传统的 RD 结构只适用于离散频率稀疏信号，不适用于频域连续的信号。由于分数阶傅里叶变换能够介于时域和频域之间多视角的分析和处理信号，对于频域连续的信号却在某个角度下的分数域有可能呈现稀疏性，如雷达中常见的线性调频(Chirp)信号在频域连续却在某个特定角度下的分数域中具有稀疏性。因此，本文提出了一种新的 RD 结构，将传统频域分析的随机解调方案在分数域进行了拓展。作为更加广义的随机解调形式，传统的

频域 RD 只是分数域 RD 的特殊形式，所以能够解决一些传统 RD 无法解决的模拟信号高速率采样问题。

2 预备知识

2.1 分数阶傅里叶变换及性质

分数阶傅里叶变换^[14-15]是一种广义的傅里叶变换，可以理解为信号在时频面围绕原点做任意角度的旋转，因此能够在介于时域和频域之间的分数域上分析信号的特征。分数傅里叶变换也是一种基表示的方法，它的基函数是一族线性调频信号，因此非常适合处理线性调频信号。信号 $f(t)$ 的分数阶傅里叶变换的定义如下

$$F_\alpha(u) = F^\alpha \{f(t)\}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) K_\alpha(u, t) dt, \quad (3)$$

其中： α 为旋转角度， F^α 为分数阶傅里叶算子，积分核函数 $K_\alpha(u, t)$ 为

$$K_\alpha(u, t) = \begin{cases} A_\alpha e^{(j/2)(u^2 + t^2) \cot \alpha - jtu \csc \alpha}, & \alpha \neq k\pi \\ \delta(t-u), & \alpha = 2k\pi \\ \delta(t+u), & \alpha = (2k-1)\pi \end{cases}, \quad (4)$$

其中 $A_\alpha = \sqrt{(1 - j \cot \alpha) / 2\pi}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ 。

当旋转角度为 $-\alpha$ 时，如式(5)所示，则为分数阶傅里叶逆变换，相当于对核函数 $K_\alpha(u, t)$ 取复共轭。

$$f(t) = F^{-\alpha} \{F_\alpha(u)\}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha(u) K_\alpha^*(u, t) du. \quad (5)$$

当旋转角度为 $\pi/2$ 时，式(3)就退化为傅里叶变换。

在分数阶傅里叶运算中，同样存在卷积运算，广义的时域分数阶傅里叶卷积^[16]为

$$\begin{aligned} (x\Theta_{\alpha, \beta, \gamma} h)(t) = & [(x(t) \cdot \exp[(j/2)t^2 \cot \beta]) \\ & * (h(t) \cdot \exp[(j/2)t^2 \cot \gamma])] \\ & \cdot \exp[(-j/2)t^2 \cot \alpha], \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\Theta_{\alpha, \beta, \gamma}$ 表示分数阶卷积算子， α, β, γ 表示三个不同的角度参数。当 $\alpha=\beta, \gamma=\pi/2$ 时，广义的分数阶卷积则变成特殊的较为简单的形式，如式(7)所示：

$$\begin{cases} F^\alpha \left[(x\Theta_{\alpha, \alpha, \pi/2} h)(t) \right] (u) = \sqrt{2\pi} X_\alpha(u) H(u \csc \alpha) \\ (x\Theta_{\alpha, \alpha, \pi/2} h)(t) = \left[\left(x(t) \cdot e^{(j/2)t^2 \cot \alpha} \right) * h(t) \right] \\ \cdot e^{(-j/2)t^2 \cot \alpha} \end{cases}. \quad (7)$$

其中：“*”是传统意义上的卷积， $X_\alpha(u)$ 是信号 $x(t)$ 的分数阶傅里叶变换， $H(u \csc \alpha)$ 为 $h(t)$ 的傅里叶变换并且对变量进行 $\csc \alpha$ 尺度伸缩的结果。可以看出其形式也类似于频域卷积定理，时域广义分数阶卷积对应于分数域的乘积。由于这种形式比较简单，在本文中采取这种分数阶卷积形式。

2.2 压缩感知理论

压缩感知本质上是一种对信号的高度不完备线性测量并且由测量值高精度重建信号的理论，充分利用自然界中信号普遍存在的稀疏性，同时在随机观测的时候保证了隐含在信号的真正信息不会被丢失，其中信号的重构是以概率恢复的形式来保证的。

压缩感知理论主要分为信号的稀疏表示、感知测量和重构算法^[3-5]这三个部分。如图 1 所示，信号的稀疏表示指的是将信号 $x(t)$ 通过一些正交变换 Ψ （如傅里叶变换），变换到某个域中呈现很好的稀疏性，即在变换域中绝大多数值为零或接近于零，只有极少量的值是非零的。感知测量指的是将信号进行亚随机采样，得到少量的观测值的过程。观测矩阵 Φ 和正交变换矩阵 Ψ 相乘得到的矩阵称之为感知矩阵 Θ ，而且感知矩阵需要满足约束等距条件^[17](restricted isometry property, RIP)。图 1 中信号 x 由观测矩阵 Φ 得到观测值 y 的过程称之为感知测量。在 RD 采样的过程中，由模拟信号 $x(t)$ 经过 RD 结构进行采样得到离散观测值 $y[m]$ 的过程就对应于压缩感知理论中的感知测量。重构算法指的是利用一些有效的算法将信号从这些少量观测值中以极大概率恢复出来原信号，算法的本质都是信号稀疏的约束条件下，解决 l_0 范数最小化问题。

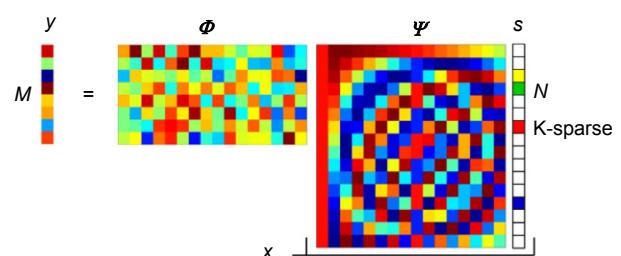


图 1 压缩感知的数学模型^[18]

Fig. 1 The mathematical model of compressed sensing^[18]

目前对压缩感知的研究大多是在理论层面，如信号的稀疏表示，感知矩阵的设计以及恢复算法的研究等方面，很少有在信号处理的背景下应用。压缩感知研究的大多问题针对的是离散数字信号，但是后来有学者将压缩感知与采样理论相结合，提出了针对模拟信号采样的模拟信息转换方案^[6](AIC)，成为了压缩感知理论应用的重要方向之一。

2.3 传统的 RD

RD 采样方案是一种基于随机解调的 AIC 方案，该方案对 AIC 的发展起到了强大的推动作用。对于频域稀疏信号，能够以低于香农采样速率的速率进行采

样，并且由采样值可以恢复出原信号，其结构如图 2 所示^[6]。

传统的 RD 结构主要由高速伪随机解调器、低通滤波器和低速率的 ADC 采样这三个部分组成。频域稀疏的信号经过与高速伪随机序列的乘积，将信号的频谱搬到低频段。然后经过低通滤波器将低频部分滤出，再通过低速率的 ADC 完成采样。经过 RD 采样后，得到的极少量的采样值就可以通过存储或者传输到达接收端，在接收端采用较为复杂的压缩感知恢复算法将原信号重构出来。

3 分数域 RD

分数域 RD 的结构和经典 RD 结构类似，只是将频域扩展到了分数域来完成随机解调、分数域滤波、低速率采样这三个过程，其原理框图图 3 所示。

信号首先和一个高速伪随机序列相乘，然后经过低通滤波器滤出低频部分，最后通过低速 ADC 完成采样。作为更加广义的 RD，分数域 RD 不仅能够解决频域稀疏信号的降采样问题，而且能够解决在频域连续而在分数域中具有稀疏性的信号的降采样问题。

3.1 分数域稀疏信号模型

信号在某个变换域下具有稀疏性^[4-5]，这是压缩感知理论适用的第一个条件。傅里叶变换的基函数是复正弦信号，正弦信号在频域有很好的稀疏性。由于分数阶傅里叶变换的基函数是复线性调频信号^[14-15]，因此 Chirp 信号在分数域也具有良好的稀疏性，从而满足 CS 理论中对信号的要求。这样就可以将传统的 RD 采样方案推广到分数域 RD 来实现对分数域稀疏信号的低速采样。因此，将信号模型建立为相同调频率 k 下，不同中心频率的 m 个 Chirp 信号之和，如式(8)所示，分数域稀疏信号模型为

$$x(t) = \sum_{i=1}^m A_i \exp \left[j \cdot 2\pi \left(f_i t + \frac{1}{2} k t^2 \right) \right] , \quad (8)$$

其中： f_i ， A_i 分别为第 i 个 Chirp 信号的中心频率及幅度， k 为调频率。在旋转角度为 $\alpha = -\arccot k$ 的分数阶傅里叶基下，Chirp 信号在 $u = f_i \sin \alpha$ 处为冲激函

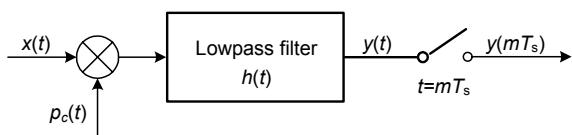


图 2 传统的随机解调器结构

Fig. 2 The classical structure of RD

数。Chirp 信号是一种常用的雷达信号，其频率随着时间线性变化，能够实现脉冲压缩，从而解决了雷达系统的作用距离和分辨力之间的矛盾。同时，Chirp 信号的产生和处理比较容易，在工程上有广泛的应用。分数域 RD 能够实现 Chirp 信号的低速率采样，因此有着很好的应用前景。

3.2 分数域 RD 的原理

3.2.1 随机解调部分

分数域稀疏信号 $x(t)$ 与伪随机序列 $p(t)$ 相乘得到 $\hat{x}(t)$ ，在分数域上可以认为是对信号进行了分数谱的搬移。随机解调后的结果为

$$\begin{aligned} F^\alpha[\hat{x}(t)] &= F^\alpha[x(t)p(t)] \\ &= A_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)p(t) e^{j\frac{u^2+t^2}{2}\cot\alpha - jtu \csc\alpha} dt \\ &= \frac{|\csc\alpha|}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} [(X_\alpha(u) e^{-j\frac{u^2}{2}\cot\alpha}) \\ &\quad * P(u \csc\alpha)] , \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $P(u \csc\alpha)$ 是 $p(t)$ 进行傅里叶变换后的 $P(u)$ 并对其进行 $\csc\alpha$ 的尺度伸缩的结果。对于周期为 T_p 的伪随机序列 $p(t)$ ，其傅里叶变换为

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) , \quad (10)$$

其中角频率为 $\omega_0 = 2\pi/T_p$ ，系数为

$$c_n = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{+T_p/2} p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt .$$

因此 $p(u \csc\alpha)$ 可以表示为

$$p(u \csc\alpha) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(u \csc\alpha - n\omega_0) . \quad (11)$$

将其代入到随机解调结果的式中，可得：

$$\begin{aligned} F^\alpha[x(t)p(t)] &= \sqrt{2\pi} |\csc\alpha| e^{j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \\ &\quad \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(X_\alpha(u) e^{-j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \right) \\ &\quad * \delta(u \csc\alpha - n\omega_0) \\ &= \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-\frac{j}{2}(n\omega_0 \sin\alpha)^2 \cot\alpha + jn\omega_0 \cos\alpha} \\ &\quad \cdot X_\alpha(u - n\omega_0 \sin\alpha) . \end{aligned} \quad (12)$$

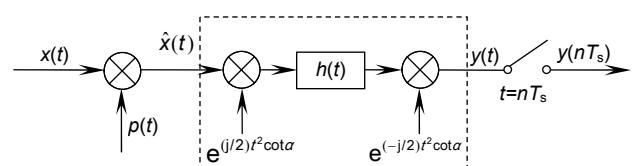


图 3 分数域随机解调器的结构

Fig. 3 The structure of RD in fractional Fourier domain

令 $u_p = \omega_0 \sin \alpha$ 。从式(12)可以看出，信号与伪随机序列相乘的结果在分数域上的形式，其实就在分数频率轴上将信号从 u_0 搬移 nu_p ，从而将信号从高频段搬到低频段。

3.2.2 分数域滤波过程

经过随机解调之后，信号在分数域的低频上也有分量，需要把低频的部分通过分数域低通滤波器滤出。由式(7)所述的分数域卷积定理的特殊形式可以看出，对于信号在分数域滤波的过程在时域可以认为信号先去 Chirp 化，然后和 $h(t)$ 进行卷积，之后再乘上一个 Chirp 因子这样一个过程。在分数域表示为信号分数谱与 $H(u \csc \alpha)$ 相乘，其中的 $H(u \csc \alpha)$ 是 $h(t)$ 经过傅里叶变换之后，进行 $\csc \alpha$ 的尺度伸缩的结果， $H(u \csc \alpha)$ 应当满足如下条件

$$H(u \csc \alpha) = \begin{cases} 1, & |u| \leq u_s \\ 0, & \text{else} \end{cases}, \quad (13)$$

其中 u_s 是分数域滤波器的截止频率。令 $u' = u \csc \alpha$ ，则：

$$H(u') = \begin{cases} 1, & |u'| \leq u_s \csc \alpha \\ 0, & \text{else} \end{cases}. \quad (14)$$

因此，可以确定滤波器频率特性，经过傅里叶反变换就可以得到滤波器的冲激响应为

$$h(t) = F^{-1}[H(u')] = \frac{\csc \alpha \cdot u_s}{\pi} \operatorname{sinc}(|\csc \alpha| u_s t). \quad (15)$$

在分数域 RD 结构中，随机解调后的信号 $\hat{x}(t)$ 经过分数域滤波得到信号 $y(t)$ ，滤波之后的结果在时域和分数域的形式如式(16)、式(17)所示：

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[\left(x(t) \cdot p(t) \cdot e^{(\frac{j}{2})t^2 \cot \alpha} \right) * h(t) \right] \cdot e^{(-\frac{j}{2})t^2 \cot \alpha}, \quad (16) \\ F^\alpha[y(t)] &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-\frac{j}{2}(n\omega_0 \sin \alpha)^2 \cot \alpha + j n \omega_0 \cos \alpha} \\ &\quad \cdot X_\alpha(u - nu_p) \cdot H(u \csc \alpha). \quad (17) \end{aligned}$$

经过随机解调和分数域滤波，信号的分数谱被搬移到了各个频率点的位置，而且通过滤波保留了低频部分。然而此时滤波输出的信号还是模拟信号，需要经过采样从而得到离散的数字序列。因为滤波输出的信号频率较低，因此采样速率只需满足信号 $y(t)$ 最高频率的二倍就可以实现无失真采样。

3.2.3 低速率采样过程

根据分数域采样定理^[2,16]可知，当分数采样率为 $u_s \geq 2u_m$ 时，可以实现分数谱的无混叠采样，其中 u_m 为滤波输出信号 $y(t)$ 的最高分数域频率，分数谱采样率为 $u_s = 2\pi \sin \alpha / T_s$ 。利用冲激序列进行采样，得到的采

样信号时域形式为

$$y[mT_s] = y(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_s). \quad (18)$$

如式(18)所示，经过分数域 RD 的最后一步的低速率 ADC 采样可以得到最终的观测值 $y[m]$ 。

3.3 信号的恢复

信号经过了分数域 RD 采样得到观测值，被传输存储等处理之后。在接收端，则需要将信号从观测值中恢复出原来的信号，这部分工作由压缩感知恢复算法来完成。从复杂度的角度来看，信号的采样过程相对简单，而信号的恢复需要计算复杂度较高的算法来实现。这也正好与人们的需求相吻合，完成信号采集的设备往往是成本较低、数据处理能力低的设备，比如摄像机和录音笔。而完成信号的恢复过程往往是采用高性能的计算机完成。

如上文中的图 1 所示，重构的过程是对应于压缩感知理论中由观测值 y 和感知矩阵 Φ 求解信号 x 的过程。要保证信号能够以极大概率恢复出来，首先要保证信号稀疏性的条件，也就是说能够在某种变换下稀疏表示。其次，感知矩阵需要满足约束等距条件(RIP)，也就是测量矩阵满足一定的随机性从而保证与稀疏矩阵的不相关。在分数域 RD 结构中，高速伪随机序列保证了测量矩阵的随机性，因此如果信号在分数域中满足稀疏性就可以恢复出原信号。在重构过程中，测量值和感知矩阵是作为先验条件，感知矩阵对应于分数域 RD 采样的整个过程，因此需要推导感知矩阵的形式才能采用有效的算法恢复原信号。由上面关于分数域 RD 的推导过程可知，信号 $x(t)$ 经过分数域 RD 采样之后，采样值 $y[m]$ 为

$$\begin{aligned} y[m] &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\left(x(t) \cdot p(t) \cdot e^{(\frac{j}{2})t^2 \cot \alpha} \right) * h(t) \right] \\ &\quad \cdot e^{(-\frac{j}{2})t^2 \cot \alpha} \delta(t - mT_s). \quad (19) \end{aligned}$$

对于时域 $t \in [-T/2, T/2]$ 的信号 $x(t)$ ，可以用分数阶傅里叶级数^[15]来表示

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \sqrt{\frac{\sin \alpha + j \cos \alpha}{T}} \\ &\quad \cdot e^{-j \frac{t^2 + (\frac{n2\pi \sin \alpha}{T})^2}{2} \cot \alpha + j n \frac{2\pi t}{T}}, \quad (20) \end{aligned}$$

其中系数 a_n 为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sqrt{(\sin \alpha - j \cos \alpha) / T} \\ &\quad \cdot e^{j \frac{t^2 + (\frac{n2\pi \sin \alpha}{T})^2}{2} \cot \alpha - j n \frac{2\pi t}{T}} dt \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi \sin \alpha}{T}} X_\alpha \left(n \frac{2\pi \sin \alpha}{T} \right) .$$

因此，信号可以表示为系数向量乘以分数阶傅里叶的基向量

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \psi_n(t) , \quad (21)$$

其中的基向量为

$$\psi_n(t) = \sqrt{(\sin \alpha + j \cos \alpha)/T} e^{-j \frac{t^2 + (n 2\pi \sin \alpha / T)^2}{2} \cot \alpha + j n \frac{2\pi t}{T}} .$$

然后将信号的分数阶傅里叶级数形式代入式(19)，得到的采样值可以表示为

$$\begin{aligned} y[m] &= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \psi_n(\tau) \right) \cdot p(\tau) \cdot e^{(j/2)\tau^2 \cot \alpha} \cdot h(t - \tau) d\tau \right\} \\ &\quad \cdot e^{(-j/2)t^2 \cot \alpha} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_s) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{(-j/2)(mT_s)^2 \cot \alpha} \\ &\quad \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(\tau) \cdot p(\tau) \cdot e^{(j/2)\tau^2 \cot \alpha} \cdot h(mT_s - \tau) d\tau \right\} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \theta_{mn} \cdot a_n , \end{aligned} \quad (22)$$

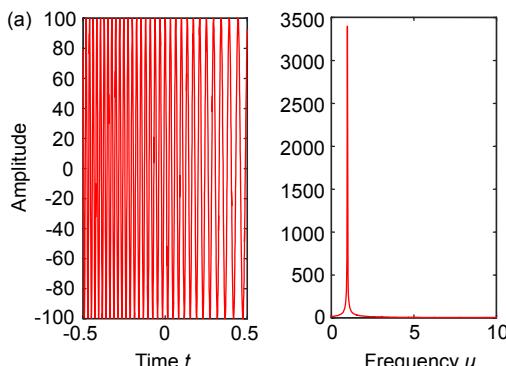
其中感知矩阵中的元素

$$\theta_{mn} = e^{(-j/2)(mT_s)^2 \cot \alpha} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(\tau) \cdot p(\tau) \cdot e^{(j/2)\tau^2 \cot \alpha} \cdot h(mT_s - \tau) d\tau ,$$

式(22)用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \dots & \theta_{1n} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \dots & \theta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{m1} & \theta_{m2} & \dots & \theta_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a[1] \\ a[2] \\ \vdots \\ a[n] \end{bmatrix} . \quad (23)$$

通过上述的推导，分数域随机解调得到的采样值 $y[m]$ 可以用感知矩阵 $\Theta_{m \times n}$ 与信号的稀疏系数向量 $\alpha_{n \times 1}$ 的乘积来表示



$$y = \Theta \alpha . \quad (24)$$

不同于香农采样定理中恢复原信号的线性方法，压缩感知中信号的恢复是非线性的，需要利用信号的稀疏性等条件恢复信号。从数学角度分析，信号的恢复实质上是求解 l_0 范数最小化问题

$$\hat{\alpha} = \arg \min \|\alpha\|_0 \text{ subject to } y = \Theta \alpha .$$

其中 $\|\cdot\|_0$ 表示 l_0 零范数，也就是求向量中非零元素的个数。换句话说，重构信号需要通过测量值和感知矩阵求解最稀疏的向量 α ，然后通过分数傅里叶反变换就可以得到原信号。然而 l_0 范数最小化问题是 NP-hard 问题^[4-5]，在多项式时间内难以求解。大多数情况下，将其退化为 l_1 范数的最小化问题，求出近似解。因此可以利用一些凸优化算法来求解，如迭代加权最小二乘算法(iteratively reweighted least squares, IRLS)^[19]，还可以利用一些贪婪算法，如正交匹配追踪算法(orthogonal matching pursuit, OMP)^[20]算法来恢复信号，此处不再详述。

4 仿真结果和讨论

4.1 信号及其参数设置

由于 Chirp 信号在分数域有良好的稀疏性，在本次仿真中采用单个 Chirp 信号作为输入信号，信号形式为 $s(t) = A e^{j(\omega_0 t + k t^2 / 2)}$ 。其中，Chirp 信号的幅度为 $A = 100$ ，中心角频率为 $\omega_0 = 200$ rads，调频率为 $k = -200$ 。由上文所述，Chirp 信号在特定的旋转角度 $\alpha = \cot(-k)$ 下的分数阶傅里叶变换为冲激函数。如图 4(a)所示，Chirp 信号的分数域频谱为 $u = \omega_0 \sin \alpha$ 处的冲激函数。

如图 4(b)所示，伪随机序列 $p(t)$ 采用由最长线性移位寄存器产生的 m 序列，其中 ± 1 变化的速率要大于 Chirp 信号的奈奎斯特速率来保证其随机性。

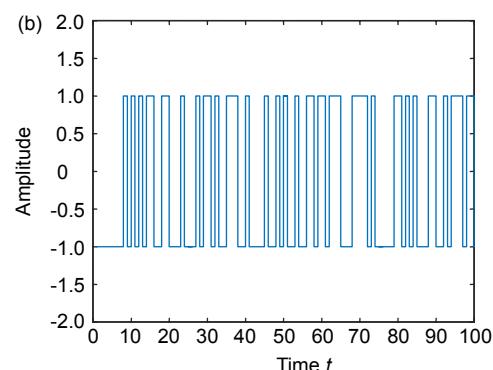


图 4 (a) 输入信号：Chirp 信号的时域和分数域；(b) 伪随机序列： m 序列

Fig. 4 (a) The Chirp signal both in time and fractional Fourier domain; (b) The pseudorandom sequence: m sequence

4.2 随机解调过程

随机解调的结果如图 5 所示。

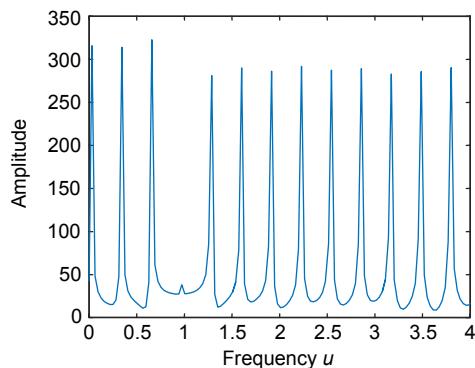


图 5 随机解调之后的信号在分数域波形

Fig. 5 The result of random demodulation in fractional domain

从随机解调的结果可以看出，信号的分数谱被搬移到了每个等间隔的频率点上。与理论推导中式(12)相符，谱线的间隔为 $\Delta u = \Delta f \sin \alpha$ ，其中 Δf 为伪随机序列的频域谱线间隔。随机解调后需要通过分数域滤波出去高频的部分，分数域低通滤波器的截止频率 u_s

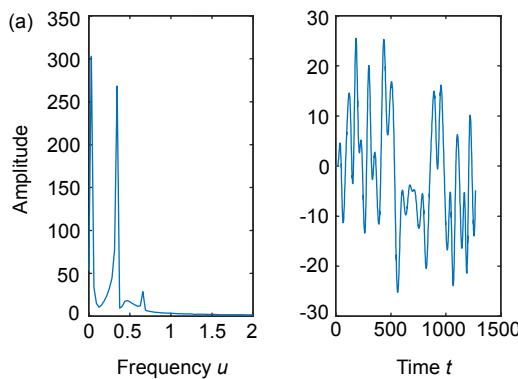


图 6 (a) 分数域滤波输出信号的时域和分数域

Fig. 6 (a) The signal after filtered in fractional Fourier domain and time domain

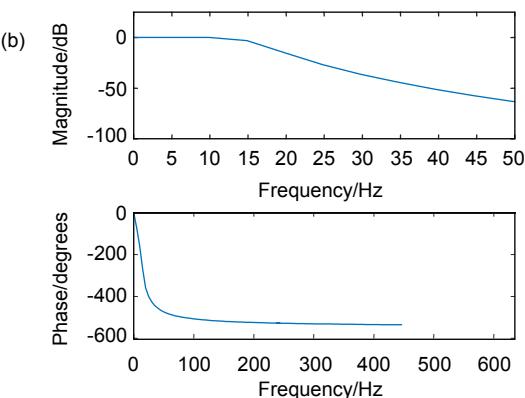


图 6 (b) 巴特沃斯滤波器的频率特性

Fig. 6 (b) Frequency characteristic of Butterworth filter

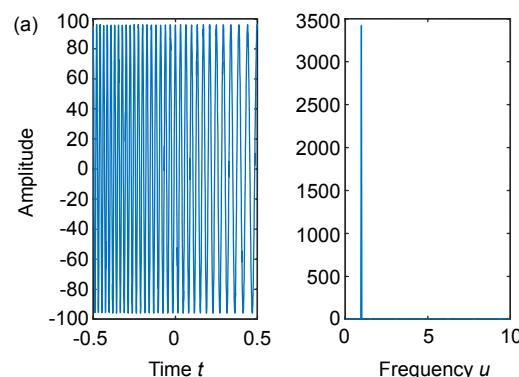


图 7 (a) 利用 gOMP 算法恢复的 Chirp 信号

Fig. 7 (a) The recovered Chirp signal using gOMP algorithm

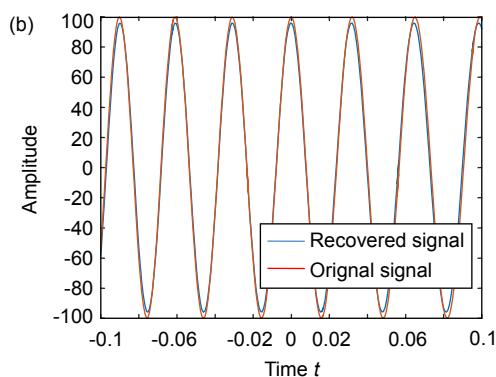


图 7 (b) 恢复的信号与原始信号的对比

Fig. 7 (b) The contrast of recovered signal and original signal

由谱线间隔 Δu 决定。由前面的分析可知，可以通过特殊的卷积形式从频域设计滤波器。由式(14)可知，频域中滤波器的截止频率须满足 $f_s \geq u_s \csc \alpha = \Delta f$ 。在此次仿真中，滤波器采用巴特沃斯滤波器实现。滤波器的频率特性及其滤波结果如图 6 所示。

经过滤波之后的模拟信号需经过下一级 ADC 的采样，由式(18)可知，ADC 的采样间隔与分数域滤波器的截止频率有关，在本次仿真中采样速率为 $2u_s$ 。至此，信号经过分数 RD 完成了采样得到离散的观测值序列。

4.3 信号恢复结果

信号重构部分，采用广义正交匹配追踪(generalized orthogonal matching pursuit, gOMP)^[21]算法恢复原始信号，与 OMP 算法相比具有更好的收敛性，能够大大减少迭代次数。恢复结果如图 7 所示。

从恢复结果可以看出，信号在分数域上的位置和原始信号一样，只是幅度有点差别。利用均方误差(normalized mean square error, NMSE)衡量其恢复效

果, 其计算式为

$$NMSE = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}, \quad (25)$$

其中: $x(t)$ 为原始信号, $\hat{x}(t)$ 为所恢复信号。重构信号与原始信号的均方误差为 0.0912, 基本上可以认为信号得到了恢复。

5 结 论

本文将传统的随机解调方案从频域拓展到了分数域, 分数域的随机解调方案是传统随机解调方案的推广, 而传统的频域分析的随机解调器则是分数域旋转角度为 $\pi/2$ 下的特殊情况。分数域随机解调方案能够解决在频域不稀疏, 却在分数域具有稀疏性的信号的压缩采样, 使得采样后的数据量大大减少。对于雷达中常见的 Chirp 信号, 这种新的采样方法能够将 Chirp 信号的采样速率降低到奈奎斯特速率之下, 实验仿真结果与理论吻合较好。然而目前的研究大多是理论分析和仿真验证, 距离真正地投入实践还存在许多的问题。而且信号重构的部分较为复杂, 针对模拟信息转换的更有效的重构算法还有待研究。

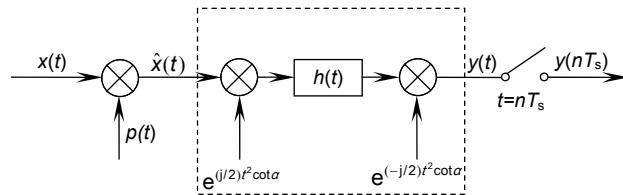
参 考 文 献

- [1] Unser M. Sampling—50 years after Shannon[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2000, **88**(4): 569–587.
- [2] Xia X G. On bandlimited signals with fractional Fourier transform[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 1996, **3**(3): 72–74.
- [3] Shi G M, Liu D H, Gao D H, et al. Advances in theory and application of compressed sensing[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2009, **37**(5): 1070–1081.
石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. 电子学报, 2009, **37**(5): 1070–1081.
- [4] Donoho D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(4): 1289–1306.
- [5] Eldar Y C, Kutyniok G. *Compressed Sensing: Theory and Applications*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
- [6] Kirolos S, Laska J, Wakin M, et al. Analog-to-information conversion via random demodulation[C]//*Proceedings of 2006 IEEE Dallas/CAS Workshop on Design, Applications, Integration and Software*, 2007: 71–74.
- [7] Tropp J A, Laska J N, Duarte M F, et al. Beyond Nyquist: efficient sampling of sparse bandlimited signals[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, **56**(1): 520–544.
- [8] Mishali M, Eldar Y C. From theory to practice: sub-Nyquist sampling of sparse wideband analog signals[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, **4**(2): 375–391.
- [9] Mishali M, Elron A, Eldar Y C. Sub-Nyquist processing with the modulated wideband converter[C]//*Proceedings of 2010 IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing*, 2010: 3626–3629.
- [10] Zhao Y J. Study on compressive sampling and recovery algorithm of sparse analog signal[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2012.
赵贻玖. 稀疏模拟信号压缩采样与重构算法研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2012.
- [11] Yao T T. Research on analog to information conversion technology based on modulated wideband converter[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2015.
姚婷婷. 基于 MWC 的模拟信息转换技术研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015.
- [12] Zhang G, Fang Q, Tao Y, et al. Advances in analog-to-information convertor[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2015, **37**(2): 229–238.
张弓, 方青, 陶宇, 等. 模拟信息转换器研究进展[J]. 系统工程与电子技术, 2015, **37**(2): 229–238.
- [13] He J Y, Tian S, Wang X, et al. Noise analysis of high bandwidth sparse signals processed by AIC[J]. *Editorial Office of Optics and Precision Engineering*, 2015, **23**(10): 637–643.
贺继渊, 田松, 王星, 等. 模拟信息转换处理高带宽稀疏信号的噪声分析[J]. 光学精密工程, 2015, **23**(10): 637–643.
- [14] Namias V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics[J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1980, **25**(3): 241–265.
- [15] Sha X J, Shi J, Zhang Q Y. *Fractional Fourier Transform Theory and Its Applications in Communication Systems*[M]. Beijing: Posts and Telecom Press, 2013.
沙学军, 史军, 张钦宇. 分数傅里叶变换原理及其在通信系统中的应用[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2013.
- [16] Shi J, Sha X J, Song X C, et al. Generalized convolution theorem associated with fractional Fourier transform[J]. *Wireless Communications & Mobile Computing*, 2015, **14**(13): 1340–1351.
- [17] Candès E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J]. *Comptes Rendus Mathématique*, 2008, **346**(9–10): 589–592.
- [18] Baraniuk R G. A lecture on compressive sensing[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007, **24**(4): 118–121.
- [19] Ramani S, Fessler J A. An accelerated iterative reweighted least squares algorithm for compressed sensing MRI[C]//*Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro*, 2010: 257–260.
- [20] Tropp J, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, **53**(12): 4655–4666.
- [21] Wang J, Kwon S, Shim B. Generalized orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(12): 6202–6216.

Analog to information conversion for sparse signals band-limited in fractional Fourier transform domain

Song Weibin, Zhang Shengru, Deng Yiqiu, Sun Nan, Shi Jun*

Communication Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China



The structure of RD in fractional Fourier domain

Overview: The classical Shannon sampling theorem has a profound influence on signal processing and communication. For an analog signal $f(x)$ contains no frequencies higher than $W/2$ Hz, we can sample the signal uniformly at the rate of the W Hz, as prescribed by the theorem. Although the Shannon sampling theory is elegant and has proven to be fruitful, because of the constraints in hardware condition, it is difficult to sample radio frequency signals of very high bandwidth with analog-to-digital converter. As the development of sampling theorem, there are various extensions of the Shannon sampling theorem in the literature. Including sampling for functions of more than one variable, random processes, non-uniform sampling, generalized functions, and so on. In recent years, the Shannon sampling theorem has also been extended to the fractional Fourier transform (FRFT) which is a more general integral transform than the usual Fourier transform (FT).

The fractional sampling theorem is similar to the Shannon sampling theorem, which is concise and widely recognized. For an Ω_α band-limited signal whose fractional spectrum is at $[-u_m, u_m]$, we sample the signal at the fractional sampling rate u_s satisfied $u_s > 2u_m$. Then we can realize the non-aliasing sampling and could represent exactly using the uniform samples of signal. However, the similar problem also exists just like Shannon sampling theorem, this fractional sampling theorem becomes impractical when the band limit of signal is very large because of the hardware cannot meet its demand.

With the increasing contradiction between high rate sampling and conversion accuracy, the traditional analog to digital conversion technology, which is based on the Shannon sampling theorem, is facing a great challenge, especially for the bottleneck effect on reducing the sampling rate. In recent years, the analog-to-information conversion (AIC) technology, which is based on the theory of compressive sensing, provides an effective method to solve this problem. However, the signal model of the existing AIC is only suitable for sparse signals band-limited in the Fourier transform (FT) domain. It cannot be applied to non-bandlimited chirp signals which are widely used in electronic information systems, including radar and communications.

Towards this end, we propose a new AIC based on the fractional Fourier transform (FRFT), which is not only the extension of the traditional AIC in the FRFT domain, but also can solve the problem as mentioned above. This novel sampling structure can greatly reduce the high sampling rate of signals, which has sparsity in fractional domain and especially for chirp signal. The theoretical derivation is presented, and the corresponding simulation analysis is also given. The simulation results are consistent with the theoretical analysis.

Citation: Song W B, Zhang S R, Deng Y Q, et al. Analog to information conversion for sparse signals band-limited in fractional Fourier transform domain[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2018, 45(6): 170740

Supported by National Natural Science Foundation of China (61501144) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (01111305)

* E-mail: junshi@hit.edu.cn